

# Protokoll Grundpraktikum I: T7 Spezifische Wärmekapazität idealer Gase

Sebastian Pfitzner

18. Juni 2013

**Durchführung:** Sebastian Pfitzner (553983), Anna Andrie (550727)

**Arbeitsplatz:** Platz 2

**Betreuer:** Martin Rothe

**Versuchsdatum:** 12.06.2013

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Abstract</b>	<b>1</b>
<b>2 Messwerte und Auswertung</b>	<b>2</b>
2.1 Methode von Clément-Desormes . . . . .	2
2.2 Schwingungsmethode . . . . .	6
2.2.1 Luft . . . . .	7
2.2.2 Argon . . . . .	8
<b>3 Diskussion der Ergebnisse</b>	<b>8</b>

## 1 Abstract

In diesem Versuch geht es um die Bestimmung des Adiabatenexponenten  $\kappa$ , der einerseits in direkter Abhängigkeit zur Wärmekapazität bei konstantem Druck bzw. konstantem Volumen steht und andererseits von der Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  der Gasteilchen abhängt:

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_p}{C_m} = a + \frac{2}{f} \quad (1)$$

Es werden die Methode von Clément-Desormes, bei der die adiabatische Expansion ausgenutzt wird, und die Schwingungsmethode, bei der ein Kolben über einem gasgefüllten Zylinder schwingt, verwendet.

## 2 Messwerte und Auswertung

### 2.1 Methode von Clément-Desormes

Der Druck im Innern des Gasballons wird mit einer Pumpe erhöht. Dadurch erwärmt sich die Luft

Insgesamt wurden sechs Messreihen aufgenommen, wobei die Höhendifferenz der Wassersäule im Manometer jede Minute aufgenommen wurde. Fünf Minuten nach der Druckerhöhung im Innern des Glasballons wird ein adiabatischer Druckausgleich durchgeführt und das Verhalten des Systems weitere fünf Minuten beobachtet. Die so gewonnenen Werte erlauben es, die Höhendifferenz zum Zeitpunkt des Druckausgleichs zu bestimmen und daraus kann mithilfe einer abgeleiteten Formel (Herleitung im gelben Skript) der Adiabatenexponent ermittelt werden:

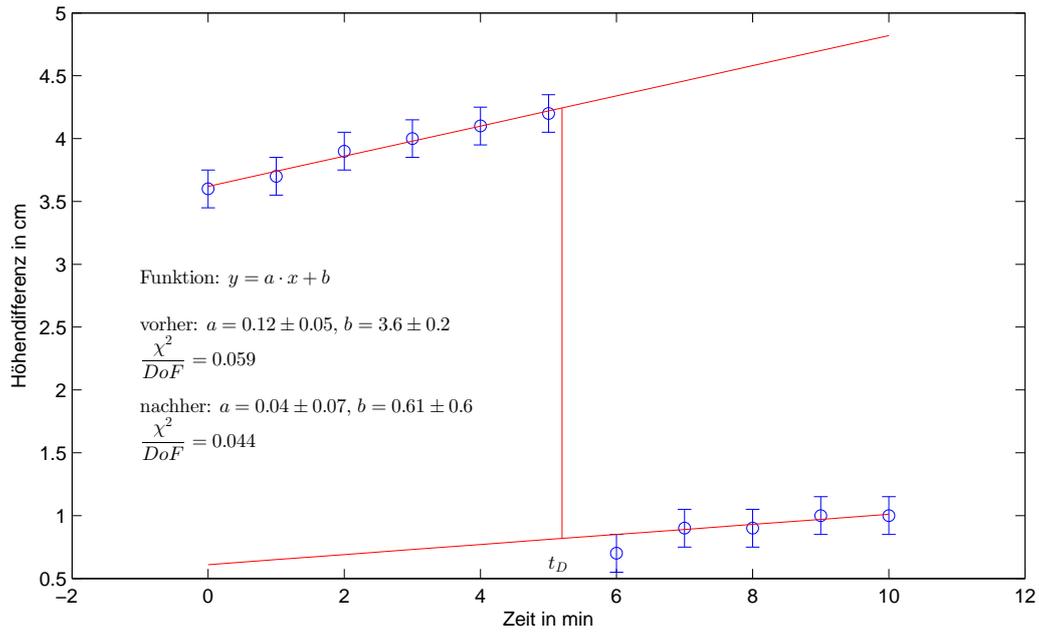
$$\kappa_D = \frac{h_1}{h_1 - h_2} \quad (2)$$

Es ist allerdings eine Korrektur der Werte vorhanden, da das Manometer schief steht und demzufolge auch im Fall des ausgeglichenen Drucks eine Höhendifferenz von  $k = 2 \text{ mm}$  vorliegt. Für den eigentlichen Höhenunterschied gilt also  $\Delta h = h_{rechts} - k - h_{links}$ .

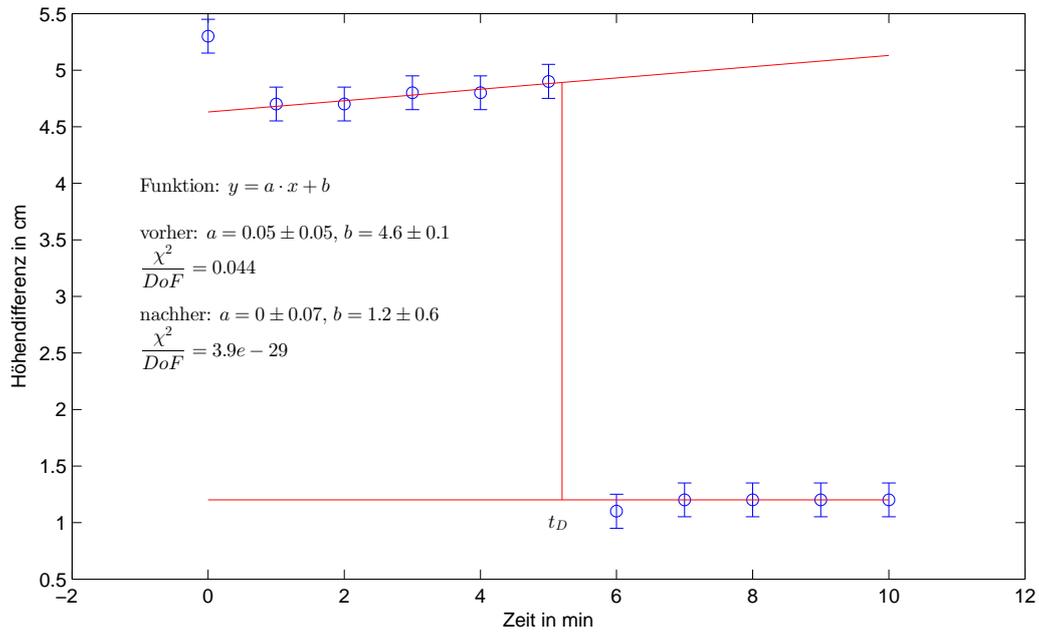
Weiterhin tritt bei einigen Messungen eine Überlagerung der erwarteten Kurve mit einem linearen Innendruckanstieg vor, der auf Temperaturänderungen zurückzuführen ist. Aus diesem Grund wird jeweils ein linearer Fit für die letzten fünf Messpunkte nach dem Erzeugen des Überdrucks und die letzten vier nach dem Druckausgleich angefertigt. Daraus kann nun die Änderung der Höhendifferenz zum Zeitpunkt  $t_D \approx 5,1 \text{ min}$  berechnet werden, aus der sich mit der Formel (2) der Adiabatenexponent berechnen lässt.  $t_D$  wurde abgeschätzt, da der genaue Zeitpunkt der adiabatischen Zustandsänderung nicht gemessen wurde.

Die Unsicherheit den so bestimmten Adiabatenexponenten  $\kappa_D$  stammt aus der Unsicherheit der aus den Fits extrapolierten Punkte. Diese ergeben sich aus durch gaußsche Fehlerfortpflanzung aus der Gleichung für eine lineare Funktion  $h = a \cdot t + b$ , wobei sich  $a$ ,  $b$ ,  $\Delta a$  und  $\Delta b$  aus den Fits ergeben:

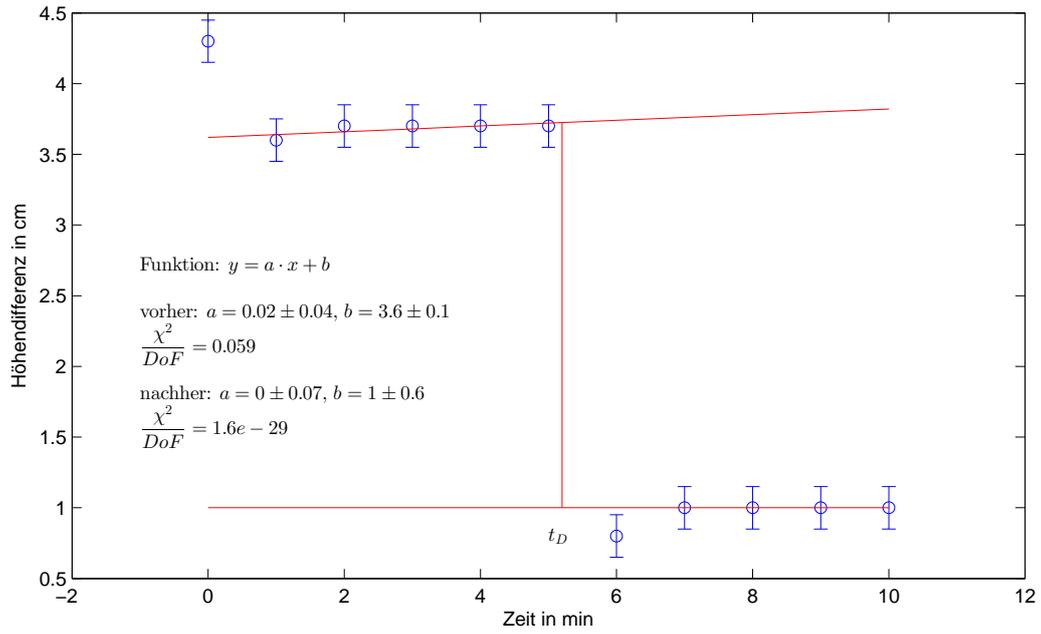
$$\begin{aligned} \Delta h_1 &= \sqrt{t_D^2 \cdot \Delta a_1^2 + \Delta b_1^2} \\ \Delta h_2 &= \sqrt{t_D^2 \cdot \Delta a_2^2 + \Delta b_2^2} \end{aligned}$$



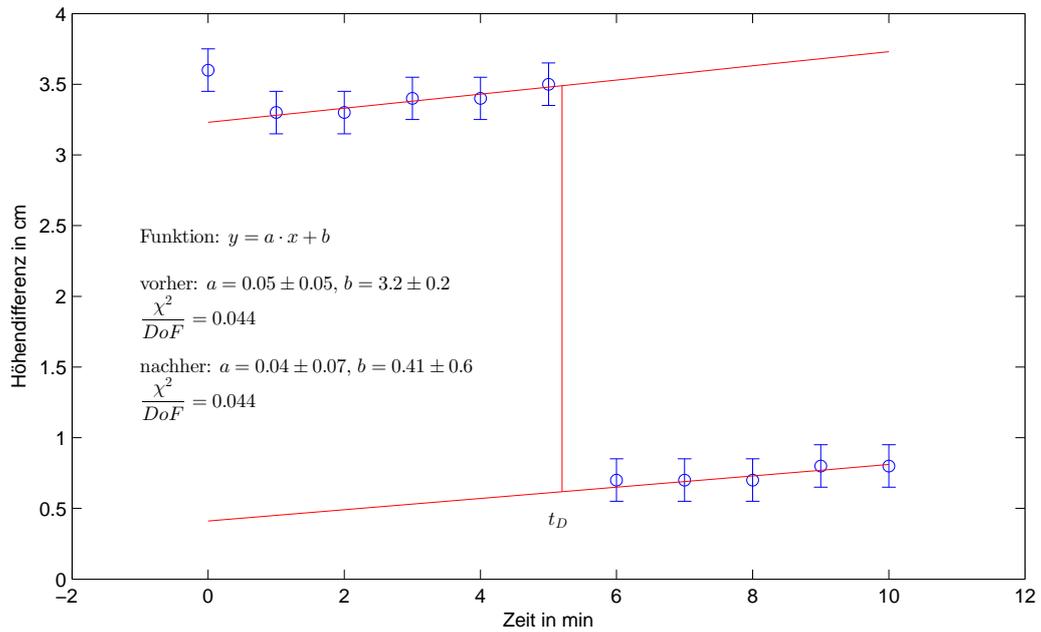
**Abb. 1:** Erste Messreihe. Alle Messdaten in blau, lineare Fits und die uns interessierende Änderung der Höhendifferenz zum Zeitpunkt  $t_D$  in rot



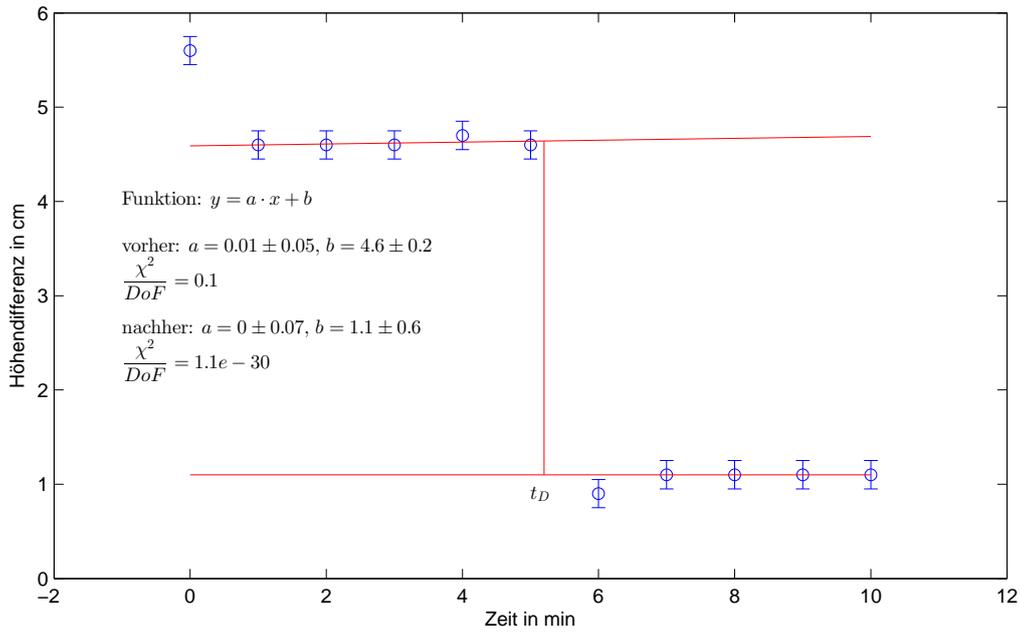
**Abb. 2:** Zweite Messreihe. Alle Messdaten in blau, lineare Fits und die uns interessierende Änderung der Höhendifferenz zum Zeitpunkt  $t_D$  in rot



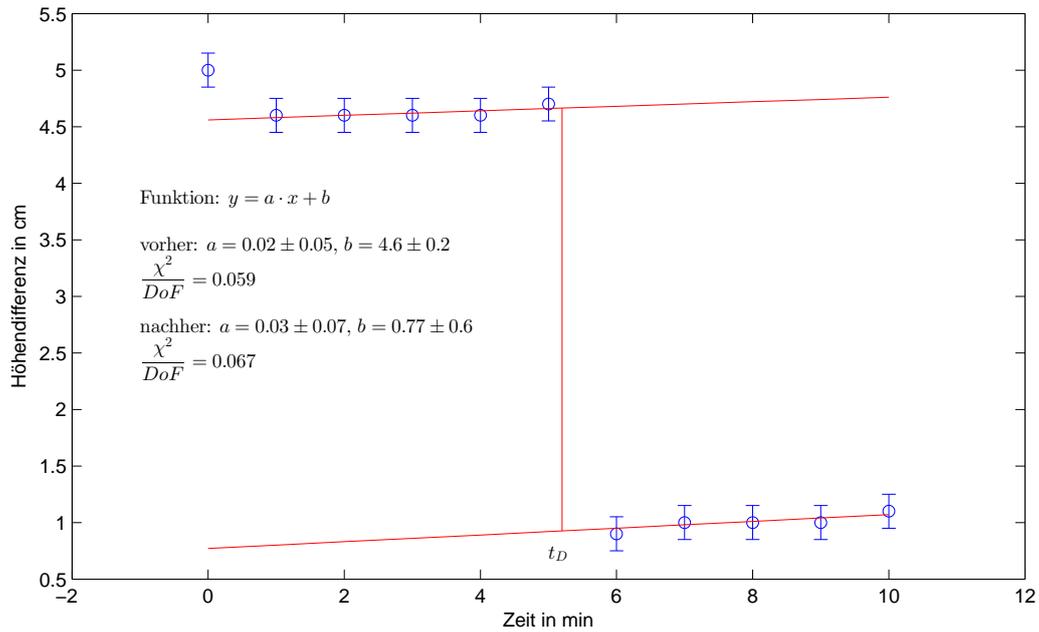
**Abb. 3:** Dritte Messreihe. Alle Messdaten in blau, lineare Fits und die uns interessierende Änderung der Höhendifferenz zum Zeitpunkt  $t_D$  in rot



**Abb. 4:** Vierte Messreihe. Alle Messdaten in blau, lineare Fits und die uns interessierende Änderung der Höhendifferenz zum Zeitpunkt  $t_D$  in rot



**Abb. 5:** Fünfte Messreihe. Alle Messdaten in blau, lineare Fits und die uns interessierende Änderung der Höhendifferenz zum Zeitpunkt  $t_D$  in rot



**Abb. 6:** Sechste Messreihe. Alle Messdaten in blau, lineare Fits und die uns interessierende Änderung der Höhendifferenz zum Zeitpunkt  $t_D$  in rot

Für die Unsicherheit von  $\kappa_D$  ist eine Größtfehlerabschätzung angebracht, da  $h_1$  und  $h_2$  korreliert sind:

$$\Delta\kappa_D = \left| -\frac{h_2}{(h_1 - h_2)^2} \cdot \Delta h_1 \right| + \left| \frac{h_1}{(h_1 - h_2)^2} \cdot \Delta h_2 \right|$$

Aus den Fits ergeben sich folgende Höhendifferenzen zum Zeitpunkt  $t_D$ , ihre Unsicherheiten sowie die jeweils daraus abgeleiteten Adiabatenexponenten samt Unsicherheit, dargestellt in Tabelle 1.

$i$	1	2	3	4	5	6
$h_1$ in cm	4,24	4,89	3,72	3,49	4,64	4,66
$\Delta h_1$ in cm	0,31	0,28	0,27	0,30	0,30	0,29
$h_2$ in cm	0,82	1,20	1,00	0,62	1,10	0,93
$\Delta h_2$ in cm	0,68	0,68	0,67	0,70	0,69	0,67
$\kappa$	1,24	1,33	1,37	1,22	1,31	1,25
$\Delta\kappa$	0,17	0,18	0,24	0,16	0,17	0,13

**Tab. 1:** Höhendifferenzen und daraus folgende Adiabatenkoeffizienten samt Unsicherheit

Daraus folgt durch die Bildung eines gewichteten Mittelwertes für den Adiabatenexponenten

$$\kappa_D = 1,27 \pm 0,07$$

## 2.2 Schwingungsmethode

Bei dieser Methode ergibt sich der Adiabatenexponent aus der Periodendauer eines Schwingkörpers, der die Luft in einem Gefäß bei der Abwärtsbewegung komprimiert und durch die so gespeicherte Energie wieder nach oben beschleunigt wird. Mit folgende im Skript hergeleiteten Gleichung lässt sich aus den Kenngrößen des Gefäßes sowie des Schwingkörpers sowie der Periodendauer der Adiabatenexponent berechnen:

$$\kappa_S = \frac{4 \cdot V \cdot m}{r^4 \cdot p \cdot T^2} \quad (3)$$

Hierbei ist  $V$  das Volumen im Glasballon,  $m$  die Masse und  $r$  der Radius des Schwingkörpers und  $T$  die Periodendauer. Genau genommen schwingt nicht nur der Schwingkörper sondern auch ein Teil des Gases mit, dieser hat jedoch eine vernachlässigbar kleine Masse, die in der Unsicherheit der Masse des Zylinders liegt.

Die Schwingung würde aufgrund von Energieverlusten durch Reibung relativ schnell stoppen, deswegen wird dem Schwingkörper bei der Aufwärtsbewegung Energie zugeführt.

Um eine höhere Genauigkeit zu gewährleisten wird die Zeit gemessen, die der Schwingkörper für 100 Perioden benötigt.

Für die Unsicherheit des Adiabatenexponenten gilt nach gaußscher Fehlerfortpflanzung

$$\Delta\kappa_S = \left[ \left( \frac{4 \cdot m}{r^4 \cdot p \cdot T^2} \right)^2 \Delta V^2 + \left( \frac{4 \cdot V}{r^4 \cdot p \cdot T^2} \right)^2 \Delta m^2 + \left( -\frac{16 \cdot V \cdot m}{r^5 \cdot p \cdot T^2} \right)^2 \Delta r^2 + \left( -\frac{4 \cdot V \cdot m}{r^4 \cdot p^2 \cdot T^2} \right)^2 \Delta p^2 + \left( -\frac{8 \cdot V \cdot m}{r^4 \cdot p \cdot T^3} \right)^2 \Delta T^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

### 2.2.1 Luft

i	1	2	3	4	5	6	conf	mean
$100 \cdot T_i$ in s	57,37	57,37	57,36	57,35	57,37	57,36	0,003	57,363

**Tab. 2:** Messwerte sowie Konfidenzintervall und Mittelwert für die hundertfache Periodendauer bei der Schwingung in Luft

Aus Tabelle 2 ergibt sich eine Periodendauer von

$$\bar{T} = T_L = (0,573\,63 \pm 0,000\,03)\text{s}$$

wobei sich die Unsicherheit nur aus dem Konfidenzintervall zusammensetzt. Systematische Fehler des Zeitmessgerätes werden dabei nicht berücksichtigt, da sie zwei Größenordnungen kleiner sind als die zufälligen Fehler.

Die weiteren Kenngrößen sind wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} m &= (6,122 \pm 0,005)\text{g} & r &= (6,965 \pm 0,005)\text{mm} \\ V &= (4381 \pm 10)\text{cm}^3 & p_a &= (1018 \pm 1)\text{hPa} \end{aligned}$$

Der Druck im Innern des Gefäßes  $p$  setzt sich aus dem Außendruck  $p_a$  und einer Komponente aus der Masse des Schwingkörpers pro Querschnittsfläche zusammen. Dementsprechend ergibt sich folgende Gleichung:

$$p = p_a + \frac{m \cdot g}{\pi r^2}$$

Für die Ungenauigkeit gilt  $\Delta p = \Delta p_a$ , da dieser Term dominiert. Die durch  $m$  und  $r$  hervorgerufenen Anteile an der Unsicherheit zeigen sich erst in dritten Nachkommastelle, sind also vollkommen irrelevant. Für die Gravitationsbeschleunigung<sup>1</sup> gilt  $g = (9,812\,65 \pm 0,000\,04) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Es folgt für den Innendruck

$$p = (102\,194 \pm 100)\text{Pa}$$

<sup>1</sup><http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php>, Wert für Berlin Adlershof

Aus diesen Größen ergibt sich sodann aus den Formeln (3) und (4) für den Adiabatenkoeffizienten von Luft folgendes vollständiges Ergebnis:

$$\kappa_{S,L} = 1,356 \pm 0,005$$

### 2.2.2 Argon

Die Vorgehensweise ist hier dieselbe wie im vorherigen Kapitel. Die Kenngrößen lauten hier

$$\begin{aligned} m &= (6,231 \pm 0,005)\text{g} & r &= (6,975 \pm 0,005)\text{mm} \\ V &= (4325 \pm 10)\text{cm}^3 & p_a &= (1018 \pm 1)\text{hPa} \end{aligned}$$

Die sechs Messungen der hundertfachen Periodendauer sind in Tabelle 3 aufgeführt. Für die eigentliche Periodendauer ergibt sich daraus

$i$	1	2	3	4	5	6	konfidenz	mean
$100 \cdot T_i$ in s	52,97	52,98	52,94	52,95	52,97	52,96	0,006	52,962

**Tab. 3:** Messwerte sowie Konfidenzintervall und Mittelwert für die hundertfache Periodendauer bei der Schwingung in Argon

$$\bar{T} = T_A = (0,529\,61 \pm 0,000\,06)\text{s}$$

Aus den Formeln (3) und (4) - der Innendruck berechnet sich wie im vorherigen Kapitel - ergibt sich folgendes Ergebnis für den Adiabatenexponenten von Argon:

$$\kappa_{S,A} = 1,589 \pm 0,006$$

## 3 Diskussion der Ergebnisse

In Tabelle 4 sind die Ergebnisse sowie die aus dem zweiten Teil von Gleichung (1) erwarteten Werte aufgetragen. Luft besteht zu 99% aus Stickstoff und Sauerstoff, die beide zweiatomige Gase sind und demzufolge sechs Freiheitsgrade besitzen. Argon dagegen besteht als Edelgas aus einzelnen Atomen, was nur drei Freiheitsgrade zur Folge hat.

Alle gemessenen Werte für den Adiabatenexponenten liegen unter den erwarteten Werten. Die Messung mit der Methode von Clément-Desormes liefert einen Wert, der im Rahmen der zweifachen Unsicherheit die Referenz trifft. Bei der Schwingungsmethode trifft dies nicht zu, allerdings liegen die experimentell ermittelten Werte schon näher an der Referenz. Die Referenzwerte liegen aber nicht einmal in der dreifachen Unsicherheit des Messwertes.

	Clément-Desormes	Schwingung	erwartet
$\kappa_{Luft}$	$1,27 \pm 0,07$	$1,356 \pm 0,005$	1,4
$\kappa_{Argon}$		$1,589 \pm 0,006$	1,67

**Tab. 4:** Übersicht aller Ergebnisse und der erwarteten Werte

Mögliche Fehlerquellen bei der Methode von Clément-Desormes sind einerseits Vorhandensein von Wasserdampf in der Luft, der - da dreiatomig - eine höhere Anzahl von Freiheitsgrade aufweist und das Ergebnis damit abhängig vom Anteil verkleinert. Andererseits ist die Isolierung des Glasgefäßes nicht besonders gut, sodass bereits kleine Temperaturänderungen die aufgenommen Kurven deutlich verändern. Dies kann zwar durch die lineare Regression ausgeglichen werden - dies ist aber nicht immer sinnvoll, wie im zweiten und dritten Datensatz zu sehen ist. Dort sind die Anstiege der Fits nicht ähnlich, was zwar auch durch eine sich verändernde Temperaturänderung erklären ließe, aber auch auf unberücksichtigte systematische Fehlerquellen hinweisen könnte. Die  $\frac{\chi^2}{DoF}$ -Werte  $\ll 1$  der Fits zeigen auf, dass die Unsicherheit der Messwerte zu groß ist, der Einfluss statistische Fehler einen deutlich geringeren Einfluss auf die Messwerte hat. Dies stimmt, denn der statistische Fehler wird durch die wesentlich größeren Ablesefehler überlagert, ist aber ohne große Relevanz für die schlussendlichen Werte. Im Manometer bildet sich aufgrund der Kohäsion eine Krümmung aus, die das Ablesen genauer Werte erschwert. Eine Undichtigkeit des Aufbaus lässt sich ausschließen, da dann ein Druckabfall zu beobachten wäre. Die Annahme einer adiabatischen Zustandsänderung erscheint angemessen, da die Temperatur des Gases im Ballon sich der Außentemperatur nach fünf Minuten bereits sehr gut angenähert hat.

Bei der Schwingungsmethode wirkt sich die Unsicherheit der Messung des Durchmessers des Glaskolbens am stärksten aus. Dieser Anteil ist um eine Größenordnung größer als die durch die Unsicherheiten der Masse, des Druckes und des Volumens hervorgerufenen Terme und drei Größenordnungen größer als der durch die Unsicherheit der Zeitmessung hervorgerufene Term. Offensichtlich müssten also dort Verbesserungen vorgenommen werden, um genauere Ergebnisse zu erhalten - die Zeitmessung ist jedoch mehr als nur hinreichend genau. Ein möglicher Wasserdampfanteil ist auch hier nicht auszuschließen, wird aber aufgrund der Gaszufuhr aus Gasflaschen erheblich geringer sein als der in der Raumluft. Die Kompensation der Reibung im Versuchsaufbau funktioniert hervorragend; Bei keiner der Messungen lässt sich ein Trend in den sechs aufgenommenen Messwerten feststellen.

Es lässt sich sagen, dass die Schwingungsmethode bei deutlich geringerem Aufwand um eine Größenordnung genauere Werte liefert, die außerdem näher an der Referenz liegen. Dass alle experimentell gewonnenen Daten signifikant kleiner sind als die Referenzwerte, lässt sich nicht aus dem Versuchsaufbau erklären. Es scheint also einen unbekanntem und unberücksichtigten systematischen Fehler zu geben.