

Protokoll: Grundpraktikum II O6 - Fraunhofersche Beugung

Sebastian Pfitzner

6. März 2014

Durchführung: Anna Andrle (550727), Sebastian Pfitzner (553983)
Versuchsplatz: Platz 3
Betreuer: Peter Schäfer
Versuchsdatum: 05.03.2014

Abstract

In diesem Versuch werden verschiedene Beugungs- und Interferenzerscheinungen am Beispiel eines Helium-Neon-Lasers und verschiedener Blenden sowie einem Gitter untersucht.

Mit dem durch das Gitter hervorgerufenen Beugungsmuster lässt sich die Wellenlänge des verwendeten Lasers bis auf wenige Nanometer genau bestimmen. Bei bekannter Wellenlänge lässt sich die Breite eines Einfachspaltes aus der Position der Interferenzminima auf dem Schirm errechnen, was äußerst präzise gelingt. Mit einer mikroskopähnlichen Anordnung kann die Abbesche Formel qualitativ überprüft und bestätigt werden. An einer Lochblende kann schließlich die Intensitätsverteilung quantitativ mit dem Modell verglichen werden und daraus die Lochgröße abgeleitet werden.

Inhaltsverzeichnis

1	Messwerte und Auswertung	2
1.1	Beugung am Gitter	2
1.2	Beugung am Einfachspalt	2
1.3	Gitter - Überprüfung des Abbeschen Formel	4
1.4	Beugung an der Lochblende	5
2	Ergebnisdiskussion	7

1 Messwerte und Auswertung

1.1 Beugung am Gitter

Zur Bestimmung der Wellenlänge des verwendeten Lasers wird das durch ein Gitter erzeugte Beugungsmuster betrachtet. Die Wellenlänge λ ergibt sich wie folgt aus dem k -ten Nebenmaximum, der Gitterkonstante g , dem Abstand x des Minimums vom Hauptmaximum und dem Abstand L zwischen Schirm und Gitter (siehe [2]):

$$\lambda = \frac{g}{k} \cdot \arctan\left(\sin\left(\frac{x}{L}\right)\right) \quad (1)$$

Aus der gaußschen Fehlerfortpflanzung ergibt für die Unsicherheit der Wellenlänge folgende Gleichung:

$$\Delta\lambda = \sqrt{\left(\frac{gl\Delta x}{k\sqrt{1 + \frac{x^2}{l^2}}(x^2 + l^2)}\right)^2 + \left(-\frac{gx\Delta l}{k\sqrt{1 + \frac{x^2}{l^2}}(x^2 + l^2)}\right)^2 + \left(\frac{x\Delta g}{kl\sqrt{1 + \frac{x^2}{l^2}}}\right)^2} \quad (2)$$

Die Ungenauigkeit von x wird wie folgt abgeschätzt: Zu einer durch die Breite der Beugungsmaxima bedingten Ableseungenauigkeit von $\Delta x_a = 1$ mm wird eine Messmittlungenauigkeit (Büromaßstab, siehe [1]) von $\Delta x_m = 200 \mu\text{m} + 10^{-3} \cdot x$ pythagoraisch addiert. Die Unsicherheit von L folgt ebenfalls aus der pythagoraischen Addition von einer Ableseungenauigkeit von $\Delta L_a = 3$ mm und einer Messmittlungenauigkeit von $\Delta L_m = 0,6$ mm + $0,4$ mm/m $\cdot L$ (Meterstab der Genauigkeitsklasse III, [3]). Für Δg wird eine Unsicherheit von 1 % von g abgeschätzt. Aus den vier gemessenen Werten ergeben sich also folgende Wellenlängen bei einem Schirmabstand von 1,742 m und einer Gitterkonstante von 10^{-5} m:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (633 \pm 9) \text{ nm} & \lambda_{-1} &= (630 \pm 9) \text{ nm} \\ \lambda_2 &= (632 \pm 7) \text{ nm} & \lambda_{-2} &= (632 \pm 7) \text{ nm} \end{aligned}$$

Da sich die Unsicherheiten aller vier Werte überlappen, lässt sich ein mit den Ungenauigkeiten gewichtetes Mittel bilden:

$$\bar{\lambda} = (632 \pm 4) \text{ nm}$$

Die auf dem Laser aufgedruckte Wellenlänge beträgt $\lambda_L = (632,8 \pm 0,2)$ nm, wobei die Unsicherheit hier abgeschätzt wurde. Im Rahmen der Fehlerintervalle überlappen diese Werte offensichtlich - im Folgenden wird aufgrund der geringeren Unsicherheit mit dem Vergleichswert gerechnet.

1.2 Beugung am Einfachspalt

Aus dem durch einen Einfachspalt hervorgerufenen Beugungsmuster lässt sich die Spaltbreite bestimmen. Dazu wird die Entfernung der auf dem Schirm sichtbaren Interferenzminima vom Hauptmaximum mit einem Büromaßstab bestimmt.

Da sowohl nach links (x_l) und rechts (x_r) gemessen wird, ergibt sich der Abstand des k -ten Minimums vom Hauptmaximum an der Stelle x_0 wie folgt:

$$x_k = \left| \frac{x_l - x_r}{2} \right| \quad (3)$$

$$x_0 = \frac{x_l + x_r}{2} \quad (4)$$

Die Unsicherheit der x_k ergibt sich aus der pythagoraischen Addition des Vertrauensbereichs $\bar{\sigma}_{x_0} = \sigma_{x_0}/\sqrt{n} \approx 0,007$ mm (mit σ_{x_0} als Standardabweichung und n als Anzahl der Werte) sowie der systematischen Messmittelunsicherheit des Büromaßstabes. Diese ergibt sich aus der Differenz x_k der gemessenen Werte, denn jeglicher systematische Fehler des Maßstabes bis zum ersten Wert fällt bei der Bildung der Differenz weg. Es gilt also $\Delta x_k = \sqrt{\bar{\sigma}_{x_0}^2 + (0,2 \text{ mm} + 10^{-3} \cdot x_k)^2}$. Die Spaltbreite b

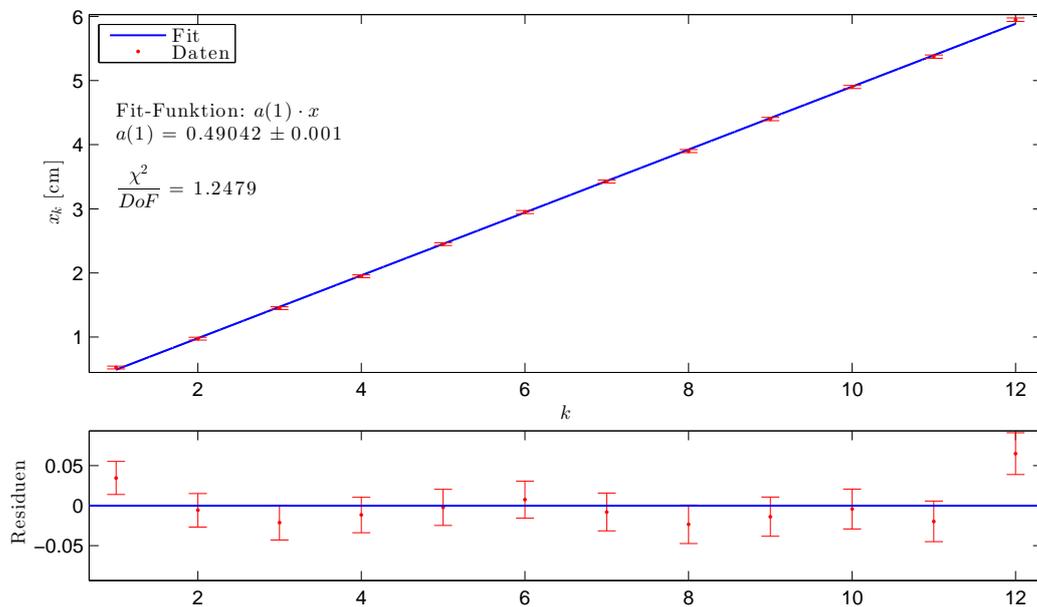


Abb. 1: Linearer Fit des Abstands der Minima vom Hauptmaximum in Abhängigkeit von der Beugensordnung

ergibt sich aus folgender Formel ([2], Seite 71, Formel 14.2):

$$\sin \alpha_k = \frac{\lambda}{b} \cdot k \approx \frac{x_k}{L} \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow x_k = \frac{L\lambda}{b} \cdot k \quad (6)$$

Mit $a = L\lambda/b$ kann nun ein linearer Fit wie in Abbildung 1 durchgeführt werden, der den freien Parameter a liefert.

Aus dem so gewonnenen Parameter lässt sich nun die Spaltbreite und deren Unsicherheit berechnen:

$$b = \frac{L\lambda}{a} \quad (7)$$

$$\Delta b = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \cdot \Delta L^2 + \left(\frac{L}{a}\right)^2 \cdot \Delta \lambda^2 + \left(-\frac{L\lambda}{a^2}\right)^2 \cdot \Delta a^2} \quad (8)$$

Für λ wird der oben genannte Vergleichswert verwendet, die Unsicherheit von $L = 1,749\text{ m}$ wird wie oben durch $\Delta L = \sqrt{(3\text{ mm})^2 + (0,6\text{ mm} + 0,4\text{ mm/m} \cdot L)^2}$ abgeschätzt.

Daraus ergibt sich für die Spaltbreite:

$$b = (225 \pm 1) \mu\text{m}$$

Der Fit in Abbildung 1 passt gut zu den Daten, denn der χ^2/DoF -Wert liegt nahe am Erwartungswert von 1 und im Residuen-Plot sind keine systematischen Abweichungen zu erkennen, die darauf hindeuten könnten, dass es sich nicht um eine Ursprungsgerade handelt.

1.3 Gitter - Überprüfung des Abbeschen Formel

In diesem Versuchsaufbau trifft das Laserlicht erst auf ein Gitter, dann auf eine Sammellinse mit Blende sowie eine Zylinderlinse und schließlich auf den Schirm. Dort entsteht ein Bild des Gitters.

Laut der Abbeschen Formel sollte das Bild des Gitters dem Gitter umso mehr entsprechen, je mehr Beugungsordnungen durch die Blende gelangen. Im Versuch wird die Blende systematisch so eingestellt, dass nur einige Beugungsordnungen durchgelassen werden.

Ordnungen	Beobachtung
0	Es ist kein Bild zu erkennen, sondern nur ein fast strukturloser, heller Streifen.
-1, 0, 1	Ein Bild des Gitters ist zu erkennen.
-2, -1, 0, 1, 2	Das Bild ist ähnlich wie im zweiten Fall, allerdings ist ein geringer Schärfezuwachs zu beobachten. Höchste Intensität.
-1, 1	Es ist ein Bild von einem Gitter zu erkennen, allerdings mit einer erheblich höheren Raumfrequenz als im zweiten Fall.
-2, 2	Das Bild sieht fast wie im ersten Fall aus, allerdings ergibt sich ein schwach erkennbares noch hochfrequenteres Muster als im voranstehenden Fall. Niedrigste Intensität.

Tab. 1: beobachtete Bilder beim Ausblenden verschiedener Beugungsordnungen

Die in Tabelle 1 dargestellten Beobachtungen lassen sich wie folgt erklären: Am Gitter wird das Licht gebeugt - dabei liegen niedrige Raumfrequenzen nahe der optischen Achse, während hohe weit weg gebeugt werden. Die Linse führt mit den Beugungsordnungen, die auf sie treffen, eine Art Fourierrücktransformation aus, sodass das Bild auf dem Schirm sichtbar wird (vergrößert durch die Zylinderlinse). Theoretisch sind alle Beugungsordnungen notwendig, um den Gegenstand im Bild vollständig rekonstruiert zu sehen. Offensichtlich reichen aber schon die mittleren drei Ordnungen aus, um ein Bild zu erkennen. Wenn nun die mittlere Ordnung wegfällt, bleiben nur noch höhere Raumfrequenzen übrig - also erscheint ein Bild mit höherer Raumfrequenz.

Weiterhin steigt die Helligkeit des Bildes an, wenn mehr Beugungsordnungen auf die Linse treffen. Dieses Verhalten ist wenig überraschend, da in den Interferenzmaxima eine höhere Feldstärke herrscht.

1.4 Beugung an der Lochblende

Zur quantitativen Beurteilung des Beugungsmusters des Lasers an einer Lochblende wird mittels einer Photodiode ein Querschnitt des Beugungsbildes angefertigt. Der Abstand zwischen Schirm und Blende beträgt $L = (1500 \pm 5)$ mm - die Unsicherheit ergibt sich wie oben aus $\sqrt{(5 \text{ mm})^2 + (0,6 \text{ mm} + 0,4 \text{ mm/m} \cdot L)^2}$.

Es werden 150 Messwerte aufgenommen, von ungefähr dem dritten Minimum auf der einen bis zum siebten Minimum auf der anderen Seite. Der gemessene Strom ist proportional zu der einfallenden Intensität, die laut Skript [2] (Seite 72, Formel 14.5) mittels folgender Formel beschrieben werden kann:

$$I = I_0 \cdot \left[\frac{J_1(\Theta/2)}{\Theta/4} \right]^2, \quad \Theta = \frac{2\pi B \sin \alpha}{\lambda} \quad (9)$$

J_1 ist hier die Besselfunktion erster Ordnung, B der Blendendurchmesser und α der Beugungswinkel. Da das Beugungsbild (bzw. der Abstand r vom Mittelpunkt) im Vergleich zum Abstand L sehr klein ist, lässt sich α durch eine Kleinwinkelnäherung wie folgt bestimmen:

$$\tan \alpha = \frac{r}{L} \approx \alpha \approx \sin \alpha \quad (10)$$

Als geeignete Fitfunktion ergibt sich daraus mit $r = |x - x_0|$

$$I = I_0 \cdot \left[\frac{J_1\left(\frac{\pi B(x-x_0)}{L\lambda}\right)}{\frac{\pi B(x-x_0)}{2L\lambda}} \right]^2 + I_B \quad (11)$$

mit den Fitparametern I_0 (maximale Intensität), $a = \frac{B}{L\lambda}$ und der Hintergrundintensität I_B . Da allerdings hauptsächlich die Lage der Minima von Interesse ist (und nicht ein möglichst gut gefittetes Hauptmaximum), wird sowohl der Strom als auch

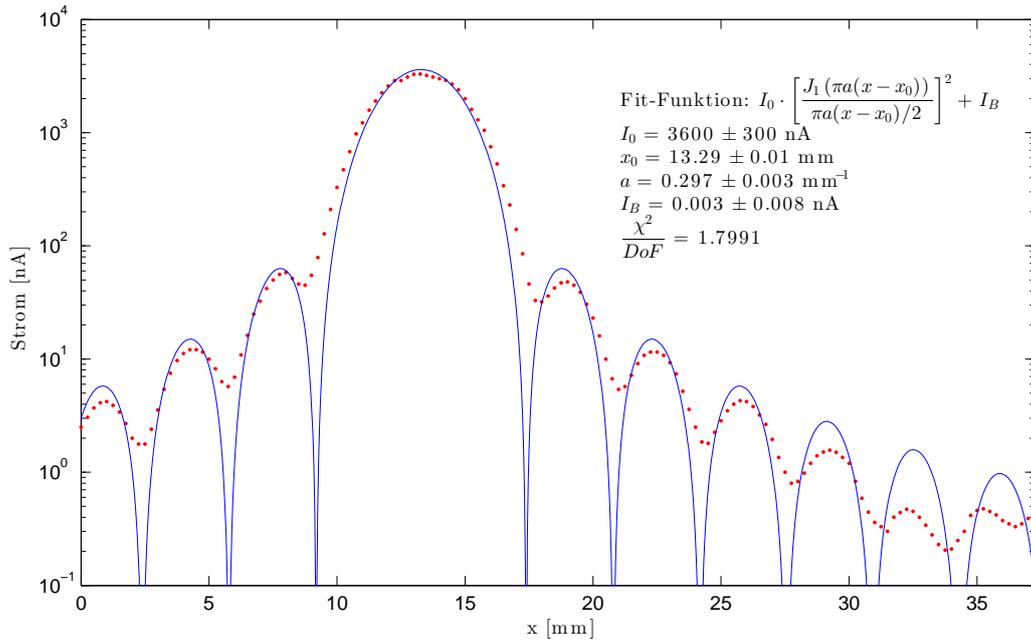


Abb. 2: halblogarithmische Darstellung der Messdaten für den Strom samt Fit

die Funktion logarithmiert. Da alle Werte für den Fit gleich gewichtet sind, wird dadurch dafür gesorgt, dass auch Werte außerhalb des Hauptmaximums relevant in den Fit eingehen.

In Abbildung 2 wird deutlich, dass die Messwerte für $x \geq 31$ mm nicht der Erwartung entsprechen, da das vorletzte aufgenommene Maximum einen geringeren Wert hat als das letzte. Aus diesem Grund - und weil auch ohne die letzten 25 Werte genügend Daten zur Verfügung stehen - werden diese Messwerte nicht mit gefittet, sind aber zur Veranschaulichung mit dargestellt.

Der aus dem Fit gewonnene Parameter a kann auch berechnet werden, da alle in ihm vorkommenden Größen bekannt sind. Der Blendendurchmesser B wurde unter einem Mikroskop bestimmt - nach der Umrechnung mit $1 \text{ Skt} = (1,003 \pm 0,003) \cdot 10^{-2} \text{ mm}$ und einer Ablesungenauigkeit von einem Skalenteil ergibt sich für ihn ein Wert von

$$B = (301 \pm 11) \mu\text{m}$$

Daraus ergibt sich dann mit L und λ wie oben ein Wert für den Durchmesser der Blende:

$$\Delta a_b = \sqrt{\left(\frac{1}{L\lambda}\right)^2 \cdot \Delta B^2 + \left(-\frac{B}{L^2\lambda}\right)^2 \cdot \Delta L^2 + \left(-\frac{B}{L\lambda^2}\right)^2 \cdot \Delta \lambda^2}$$

$$a_b = (0,316 \pm 0,001) \mu\text{m}^{-1}$$

Andersherum kann aus dem Fitparameter natürlich auch die Spaltbreite berechnet werden:

$$B_F = a \cdot L \cdot \lambda \quad (12)$$

$$B_F = \sqrt{(L \cdot \lambda)^2 \cdot \Delta a^2 + (a \cdot \lambda)^2 \cdot \Delta L^2 + (a \cdot L)^2 \cdot \Delta \lambda^2} \quad (13)$$

Das ergibt dann

$$B_F = (282 \pm 3) \mu\text{m}$$

Dieser Wert liegt nahe am eingangs berechneten Wert von $B = (301 \pm 1) \mu\text{m}$, allerdings überschneiden sich die Unsicherheiten nicht. Eine mögliche Ursache hierfür ist die Verschmutzung der Lochblende, die in die Blende in eine Richtung verkleinert. Dies wurde bei der Messung mit dem Mikroskop nicht überprüft, da versucht wurde, den tatsächlichen Lochdurchmesser zu messen. Weiterhin ist nicht sichergestellt, dass sich kein weiterer Schmutz in der Blende angesammelt hat, da der Lochdurchmesser zu Beginn des Versuchs gemessen wurde.

Für die Intensität der Hintergrundstrahlung wurde bei ausgeschaltetem Laser ein Messwert aufgenommen: $I_{B,m} = 0,0012 \text{ nA}$. Dieser liegt natürlich in der Unsicherheit wie der aus dem Fit gewonnene Wert, was allerdings hauptsächlich an der sehr großen Unsicherheit des Fitparameters liegt. Die Aussagekraft des Fits gegenüber diesem Parameter ist also sehr klein, liefert aber immerhin die passende Größenordnung.

2 Ergebnisdiskussion

Die Bestimmung der Wellenlänge durch Beugung am Gitter liefert zwar einen guten Wert, dieser ist jedoch mit einer im Verhältnis zur Werksangabe hohen Unsicherheit behaftet. Den größten Anteil zur Unsicherheit des Ergebnisses stammt hier aus der Unsicherheit des Gitters, denn dessen Relativfehler ist mit 1% um etwa eine Größenordnung größer als der der Längenmessungen (mit 0,5% für d bzw. 0,2% für L).

Die Bestimmung der Spaltbreite durch die Messung des Abstands der Beugungsminima vom Hauptmaximum liefert einen Wert, der nur mit einer äußerst geringen Unsicherheit behaftet ist. Die Größenordnung dieses Wertes passt, allerdings wäre eine Vergleichswert (z.B. durch eine Messung mit dem Mikroskop) wünschenswert.

Bei der qualitativen Betrachtung des Bilds des Gitters im Rahmen der Überprüfung der Abbeschen Formel fällt auf, dass Unreinheiten im Glas der Zylinderlinse jegliche Andeutung von einer erkennbaren periodischen Struktur zunichte machen können. Dies lässt sich jedoch in einigen Linsenpositionen umgehen, führt aber auch dazu, dass eine Struktur wahrgenommen wird, obwohl keine zu erkennen sein dürfte (z.B. im ersten Fall).

Der Kurvenverlauf in Abbildung 2 entspricht dem Fitmodell, was auch durch den χ^2/DoF -Wert nahe 1 bestätigt wird. Dass die Maxima der Messwerte gegenüber dem Fit breiter und die Minima erheblich weniger stark ausgeprägt erscheinen, verwundert nicht, denn die Fotodiode hat eine Öffnung mit einer Breite von 0,3 mm. Deshalb wird die Intensität über diese Fläche aufsummiert, so dass keine so extremen Minima zustande kommen können. Weiterhin erscheinen aus diesem Grund die Maxima (insbesondere das Hauptmaximum) breiter als sie eigentlich sind, was die Abweichungen zwischen Fit und Daten erklärt. Das stark von der Erwartung abweichende Verhalten der letzten beiden aufgenommenen Beugungsordnungen auf der rechten Seite lässt sich vermutlich auch durch Staub in der Lochblende erklären, der auch unter dem Mikroskop zu erkennen war.

Die Unsicherheit der Fitparameter in Darstellung 2 stellt aufgrund der starken Nichtlinearität des Funktionenverlaufs nur eine grobe Abschätzung dar. Insbesondere wurde der Fit ohne spezielle Gewichtung, das heißt mit überall gleichen Fehlern von 1, durchgeführt. Dies entspricht nicht der Realität, ist aber hier kaum relevant, da eigentlich nur der Parameter a interessant ist; er allein bestimmt den Abstand der Minima vom Hauptmaximum. Trotzdem ist die abgeschätzte Unsicherheit zwar nicht unrealistisch, aber trotzdem nicht akkurat, da die Unsicherheiten in x -Richtung in diesem Fall zu unrecht vernachlässigt werden spielen (auch aufgrund der nicht vernachlässigbaren Größe der Fotodiode). Diese können aber im Fit nicht berücksichtigt werden, weil sich keine Umkehrfunktion finden lässt.

Literatur

- [1] MÜLLER, U. : *Physikalisches Grundpraktikum - Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik*. <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Elektrodynamik%20und%20Optik/PDF-Dateien/Elektrodynamik%20und%20Optik.pdf>. Version: 2007
- [2] MÜLLER, U. : *Physikalisches Grundpraktikum - Elektrodynamik und Optik*. <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Elektrodynamik%20und%20Optik/PDF-Dateien/Elektrodynamik%20und%20Optik.pdf>. Version: 2010
- [3] <http://de.wikipedia.org/wiki/Meterstab>. Version: 06.03.2014, 11:48