

Protokoll: Grundpraktikum II 03/04 Prismen- und Gitterspektrometer

Sebastian Pfitzner

14. März 2014

Durchführung: Anna Andrle (550727), Sebastian Pfitzner (553983)

Arbeitsplatz: Platz 3

Betreuer: Heike Christopher

Versuchsdatum: 13.03.2014

Abstract

In diesem Versuch wird ein Gitter- und ein Prismenspektrometer untersucht. Dabei wird die Abhängigkeit des Brechungsindex von Glas von der Wellenlänge bestimmt und daraus die Wellenlänge einer Spektrallinie abgeleitet. Für die Messung mit dem Gitterspektrometer wird zunächst die Gitterkonstante bestimmt und damit dann die Wellenlänge mehrerer Spektrallinien bestimmt.

Weiterhin wird das Auflösungsvermögen beider Spektrometer untersucht und mit dem subjektiven Eindruck der Experimentatoren verglichen.

Inhaltsverzeichnis

1 Messwerte und Auswertung	2
1.1 Untersuchung des Prismas	2
1.2 Wellenlängenbestimmung mit dem Prisma	4
1.3 Untersuchung des Gitters	4
1.4 Wellenlängenbestimmung mit dem Gitter	6
2 Ergebnisdiskussion	7

1 Messwerte und Auswertung

1.1 Untersuchung des Prismas

Das gegebene Glasprisma mit der Kennzeichnung 3F2 soll im Folgenden auf die Abhängigkeit der Brechzahl n von der Vakuumwellenlänge (eigentlich in Luft, aber der Unterschied wird hier vernachlässigt) des einfallenden Lichts λ untersucht werden. Die Basisbreite des Prismas beträgt $b = (29,7 \pm 0,1)$ mm, wie dem am Versuchsplatz ausliegenden Hefter [3] zu entnehmen ist.

Zunächst wird durch Reflexion von senkrecht zur Basiskanten einfallendem Licht an den beiden nicht-Basiskanten des Prismas der brechende Winkel γ bestimmt. Aus den gemessenen Winkeln φ_i lässt sich γ sowie die Unsicherheit $\Delta\gamma$ wie folgt bestimmen (siehe [3]):

$$\gamma = \frac{1}{2}|\varphi_1 - \varphi_2| \quad (1)$$

$$\Delta\gamma = \sqrt{(\Delta\varphi_1)^2 + (\Delta\varphi_2)^2} \quad (2)$$

Die Unsicherheiten bei der Winkelmessung $\Delta\varphi_i$ werden mit einer Bogenminute abgeschätzt, wobei die eigentliche Ableseungenauigkeit eher im Bereich von einer halben Bogenminute liegt. Allerdings ist über das verwendete Goniometer nichts bekannt, sodass ein zusätzlicher Fehler von etwa einer halben Bogenminute angenommen wird. Für den brechenden Winkel des Prismas ergibt sich folgendes Ergebnis:

$$\gamma = (60,08 \pm 0,01)^\circ$$

Mithilfe der Spektrallinien einer Quecksilberdampfampe können bei fünf bekannten Wellenlängen die Winkel der minimalen Ablenkung δ_{\min} bestimmt werden. Dazu wird die nachfolgende Gleichung verwendet (vgl. [2], Seite 57, Formel 11.3); die Berechnung der Unsicherheit erfolgt nach gaußscher Fehlerfortpflanzung.

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta_{\min} + \gamma)}{\sin \frac{1}{2}\gamma} \quad (3)$$

$$\Delta n = \sqrt{\left(\frac{\cos \frac{1}{2}(\delta_{\min} + \gamma)}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma}\right)^2 \cdot \Delta\delta_{\min}^2 + \left(\frac{\sin \frac{1}{2}\delta_{\min}}{\sin^2 \frac{1}{2}\gamma}\right)^2 \cdot \Delta\gamma^2} \quad (4)$$

Die so ermittelten Brechzahlen für die verschiedenen Wellenlängen werden in Tabelle 1 dargestellt - die Winkel der minimalen Ablenkung sind im Messdatenprotokoll im Anhang zu finden.

Die Wellenlängenabhängigkeit der Brechzahl lässt sich durch die sogenannte Sellmeier-Gleichung (siehe [2], Seite 58, Formel 11.4) beschreiben. Aufgrund der wenigen aufgenommenen Messwerte wird nur bis 1 summiert und $A = 1$ gesetzt (wird in der Ergebnisdiskussion begründet). Mehr Terme würden zwar auch einen

	λ [nm]	n	Δn
violett	404,656	1,6503	0,0002
blau	435,833	1,6417	0,0002
blaugrün	491,607	1,6309	0,0002
grün	546,074	1,6239	0,0002
rot	623,440	1,6179	0,0002
gelb	???	1,6194	0,0002

Tab. 1: Brechkraft n des verwendeten Prismas bei verschiedenen Spektrallinien von Quecksilber sowie des Na-Dubletts

besseren Fit liefern, allerdings wird aufgrund der wenigen aufgenommenen Messwerte die Aussagekraft der einzelnen Parameter sinken. Die bei den Quecksilber-Spektrallinien gewonnenen Werte können also mit der nachfolgenden Funktion gefittet werden:

$$n(\lambda) = \sqrt{1 + \frac{B \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - C}} \quad (5)$$

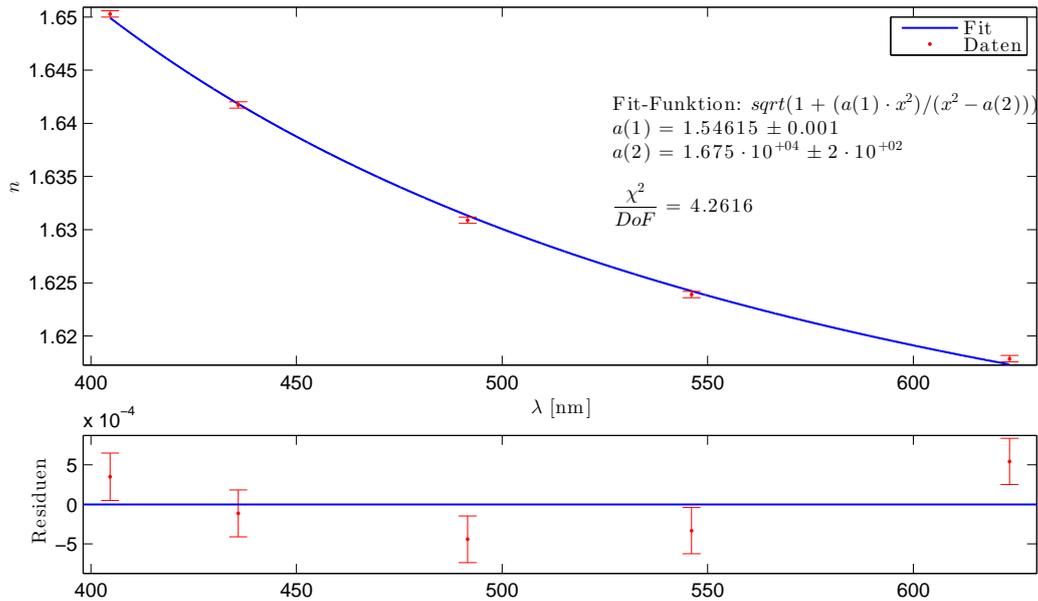


Abb. 1: Fit der Abhängigkeit der Brechkraft n von der Wellenlänge λ mit der Sellmeier-Gleichung. Hier ist $a_1 \equiv B$ und $a_2 \equiv C$. $[C] = \text{nm}^2$

Das Auflösungsvermögen $\lambda/\Delta\lambda$ des Prismas lässt sich aus der so bestimmten Abhängigkeit der Brechzahl von der Wellenlänge wie folgt berechnen (siehe [2], Seite 59, Formel 11.5). $dn/d\lambda$ ist hier die Ableitung von Gleichung (5).

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = -b \frac{dn}{d\lambda} \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = b \frac{B \cdot C \cdot \lambda}{(C - \lambda^2)^2 \sqrt{1 + \frac{B \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - C}}} \quad (7)$$

Bei einer Referenzwellenlängen von 590 nm ergibt sich also ein Auflösungsvermögen von

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 2551$$

1.2 Wellenlängenbestimmung mit dem Prisma

Die eben durchgeführte Messung wird nun mit einer Natriumdampfampe wiederholt, um die Wellenlänge des Na-Dubletts zu bestimmen. Es wird wieder δ_{\min} gemessen und die Brechzahl bei dieser - noch unbekanntem - Wellenlänge berechnet. Daraus ergibt sich das letzte Ergebnis in Tabelle 1.

Mit den vorigen Kapitel bestimmten Parametern B und C lässt sich aus der Brechzahl die Wellenlänge des verwendeten Lichts wie folgt berechnen:

$$\lambda = \sqrt{\frac{C \cdot (n^2 - 1)}{n^2 - B - 1}} \quad (8)$$

$$\Delta\lambda = \left[\left(\frac{1}{2C} \sqrt{\frac{C(n^2 - 1)}{n^2 - B - 1}} \Delta C \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{\frac{C(n^2 - 1)}{n^2 - B - 1}}}{2(n^2 - B - 1)} \Delta B \right)^2 + \left(-\frac{BCn}{(n^2 - B - 1)^2 \sqrt{\frac{C(n^2 - 1)}{n^2 - B - 1}}} \Delta n \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Für die mittlere Wellenlänge des Natrium-Dubletts ergibt sich daraus

$$\lambda_{\text{Na}} = (595 \pm 6) \text{ nm}$$

1.3 Untersuchung des Gitters

Um mithilfe des vorliegenden Gitters (mit 3 bezeichnet, Breite $b_G = 15 \text{ mm}$, als fehlerfrei angenommen) die Wellenlängen unbekanntem Lichts ermitteln zu können, muss vorerst die Gitterkonstante g bestimmt werden. Dazu wird untersucht, um welche Winkel α_k die verschiedenen Beugungsordnungen k der grünen Spektrallinie ($\lambda = 546,074 \text{ nm}$) des Quecksilbers von der optischen Achse wegbeugt werden.

Mit folgender Gleichung (vgl. [2], Seite 60, Formel 11.10) lässt sich die Gitterkonstante sowie deren Unsicherheit berechnen, wobei λ als fehlerfrei angenommen wird.

$$g = \frac{k\lambda}{\sin \alpha_k} \quad (10)$$

$$\Delta g = \frac{k\lambda \cos \alpha_k}{\sin^2 \alpha_k} \quad (11)$$

Die Messung der α_k wird für vier Beugungsordnungen in beide Richtungen durchgeführt, also $-4 \leq k \leq 4$. Die Werte für gleiche $|k|$ werden gemittelt, um systematische Fehler wie ein schräg stehendes Gitter zu vermeiden. Daraus können dann vier Werte für die Gitterkonstante samt Unsicherheit bestimmt werden. Die Fehlerintervalle der einzelnen Werte überlappen, so dass die Bildung eines gewichteten Mittels angebracht erscheint.

Es ergibt sich folgendes Ergebnis für die Gitterkonstante:

$$g = (9978 \pm 10) \text{ nm}$$

Das Auflösungsvermögen $\lambda/\Delta\lambda$ lässt sich für ein Gitter (siehe [2], Seite 61, Formel 11.11) nach oben durch folgende Formel begrenzen:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq kN \quad (12)$$

k ist hier die Beugungsordnung und N die Anzahl der beleuchteten Spalte ist. Unter der Annahme, dass das ganze Gitter beleuchtet wird, ergibt sich diese Anzahl aus

$$N = \frac{b_G}{g} \quad (13)$$

$$\Delta N = \frac{b_G}{g^2} \Delta g \quad (14)$$

Daraus ergibt sich unter der Annahme einer fehlerfreien Gitterbreite b_G eine Spaltanzahl von

$$N = 1503 \pm 1$$

Das Auflösungsvermögen für die ersten drei Beugungsordnungen lässt sich also wie folgt bestimmen:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda}(k=1) = 1503 \quad \frac{\lambda}{\Delta\lambda}(k=2) = 3006 \quad \frac{\lambda}{\Delta\lambda}(k=3) = 4509$$

Aufgrund der Untersuchung des Natrium-Dubletts mit dem Gitter können auch durch Experiment Angaben zum Auflösungsvermögen gemacht werden. Die beiden

Spektrallinien liegen rund $\Delta\lambda = 0,6 \text{ nm}$ voneinander entfernt und können mit dem durchs Fernrohr blickenden Auge ab der zweiten Beugungsordnung deutlich voneinander unterschieden werden. Allerdings ist für die Unterscheidbarkeit der beiden Linien nur ein Auflösungsvermögen von

$$\frac{589,3 \text{ nm}}{0,6 \text{ nm}} \approx 986$$

nötig. Diese wäre allerdings nach obenstehender Rechnung schon bei der ersten Beugungsordnung ohne weiteres gegeben.

1.4 Wellenlängenbestimmung mit dem Gitter

Mit der nun bestimmten Gitterkonstante g lassen sich die Wellenlängen unbekanntes Lichts bestimmen. Dafür werden die blaue sowie die gelbe Hg-Linie und auch wieder die gelbe Natrium-Linie verwendet.

Die Wellenlänge und ihr Fehler ergeben sich nach Formel (11) wie folgt:

$$\lambda = \frac{g \sin \alpha_k}{k} \quad (15)$$

$$\Delta\lambda = \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha_k}{k}\right)^2 \cdot \Delta g^2 + \left(\frac{g \cos \alpha_k}{k}\right)^2 \cdot \Delta \alpha_k^2} \quad (16)$$

Für die blaue Quecksilber-Spektrallinie werden die Winkel der ersten drei Beugungsordnungen aufgenommen, da bei höheren Ordnungen eine eindeutige Identifikation nicht mehr möglich ist. Die so Unsicherheiten der so gewonnenen Wellenlängen $\lambda_{\text{Hg,blau}}$ überlappen, weswegen folgendes gewichtetes Mittel gebildet wird:

$$\lambda_{\text{Hg,blau}} = (435,2 \pm 0,8) \text{ nm}$$

Dank der erheblich besseren Identifizierbarkeit der gelben Hg-Linie werden fünf Beugungsordnungen aufgenommen. Wieder ist die Bildung eines gewichteten Mittels möglich, es ergibt sich folgendes Resultat:

$$\lambda_{\text{Hg,gelb}} = (576,4 \pm 0,6) \text{ nm}$$

Für das Natrium-Dublett werden die Winkel für $-6 \leq k \leq 6$ aufgenommen, da die beiden Spektrallinien sehr deutlich sichtbar sind. Allerdings vergrößert sich der Abstand mit zunehmender Beugungsordnung, was die Abschätzung der Mitte zwischen beiden Spektrallinien erschwerte. Trotzdem ist die Mittelung der Resultate gerechtfertigt, da sich die Wellenlängen überlappen:

$$\lambda_{\text{Na,gelb}} = (588,7 \pm 0,4) \text{ nm}$$

2 Ergebnisdiskussion

Der brechende Winkel des Prismas stimmt gut mit dem im Skript [2] angegebenen Wert von 60° überein.

Auch die Bestimmung der Brechzahlen bei den verschiedenen Spektrallinien des Quecksilbers liefert Werte, die prinzipiell mit denen in [3] (Diagramm auf der letzten Seite) übereinstimmen. Der Fit mit der Sellmeier-Funktion liefert eine χ^2/DoF -Wert von ungefähr 4, was entweder auf etwas zu klein abgeschätzte Fehler oder auf ein schlecht passendes Modell schließen lässt. In der Tat wird die Näherung der Sellmeier-Gleichung an die reale Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellenlänge besser, je mehr Terme verwendet werden - dies macht bei der geringen Anzahl von Messwerten aber keinen Sinn. Auch der Plot der Residuen scheint darauf hinzudeuten, dass es eine Diskrepanz zwischen verwendeter Fit-Funktion und den Daten gibt. Allerdings liefert der Fit bei einem zusätzlichen Term keine sinnvollen Werte mehr, da die relativen Unsicherheiten dann größer als 100% werden. Der im Fit bestimmte Parameter C liefert eine Resonanzwellenlänge $\lambda_{\text{res}} = \sqrt{C} \approx 130 \text{ nm}$, was im ultravioletten Bereich des Lichts liegt. Dieses Ergebnis erscheint für Glas durchaus realistisch.

Der Parameter A wird hier 1 gesetzt. Bei sehr kleinen Wellenlängen $\lambda \rightarrow 0$ wird der Brechungsindex des Materials also 1 - was für sehr hochenergetische Wellen realistisch erscheint (vgl. Röntgenstrahlung etc.). Für sehr große Wellenlängen $\lambda \rightarrow \infty$ ergibt sich dann für den Brechungsindex des Prismas $n_\infty = \sqrt{1+B}$.

Die nachfolgende Tabelle vergleicht die im Experiment bestimmten Wellenlängen mit denen aus den Hinweisen [3]. Die experimentell bestimmten Wellenlängen

	$\lambda_{\text{Na,gelb}}$ [nm]	$\lambda_{\text{Hg,gelb}}$ [nm]	$\lambda_{\text{Hg,blau}}$ [nm]
Prisma	595 ± 6	-	-
Gitter	$588,7 \pm 0,4$	$576,4 \pm 0,6$	$435,2 \pm 0,8$
Vergleich	589,2937	576,9610	435,8335

Tab. 2: Vergleich der experimentell gewonnenen Ergebnisse für die untersuchten Wellenlängen mit den Referenzwerten

für die Spektrallinien des Quecksilbers stimmen sehr gut mit den Referenzwerten überein, denn diese liegen in der Unsicherheit. Beim Natrium-Dublett allerdings trifft zwar der (erheblich ungenauere) mit dem Prisma bestimmte Wert die Referenz im einfachen Fehlerintervall, der mit viel geringerem Fehler versehene mit dem Gitter bestimmte Wert allerdings nicht. Dies lässt sich vermutlich auf einen unberücksichtigten systematischen Messfehler zurückführen, der durch die recht subjektive Bestimmung der Mitte zwischen den beiden Spektrallinien zustande kommt. Ein besseres Vorgehen wäre hier, beide Spektrallinien auszumessen und dann den Mittelwert zu bilden.

Weiterhin lässt sich bei allen mit dem Gitter bestimmten Werten eine gegenüber der Referenz etwas zu kleine Wellenlänge beobachten, die aber außer bei Natrium nicht signifikant ist.

Das Auflösungsvermögen des Prismenspektrometers ist ab der zweiten Beugungsordnung am Gitter erheblich kleiner als bei diesem. Die Diskrepanz zwischen theoretischem Auflösungsvermögen des Gitterspektrometers und der subjektiven Wahrnehmung des Experimentators lässt sich durch das begrenzte Auflösungsvermögen des menschlichen Auges und des verwendeten Fernrohrs sowie durch die Annahme vollständig kohärentem Lichts begründen.

Literatur

- [1] MÜLLER, U. : *Physikalisches Grundpraktikum - Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik*. <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Elektrodynamik%20und%20Optik/PDF-Dateien/Elektrodynamik%20und%20Optik.pdf>. Version: 2007
- [2] MÜLLER, U. : *Physikalisches Grundpraktikum - Elektrodynamik und Optik*. <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Elektrodynamik%20und%20Optik/PDF-Dateien/Elektrodynamik%20und%20Optik.pdf>. Version: 2010
- [3] *Platzanweisung und Hinweise, Versuch O3/O4*.

034 Plünnen & Gitterspektrometer

Platz 3

Nullposition: $262^{\circ}26'$

13.3.2019

Prisma 3F2

Gitter 3

$b = (297 \pm 0,1) \text{ mm}$

↳ Breite: 15 mm

Höhe: 10 mm

Winkelmessung Prisma

$\alpha_1 = 320^{\circ}0'$

$\alpha_2 = 155^{\circ}50'$

kurze Einführung

Aufgabenstellung Skript

Formeln + Parameter

Fehlerformeln

Diskussion

Quellenangabe vernünftig

15⁰⁰ Uhr

Prisma

violett

~~211⁰31~~

211⁰31

313⁰43

blau

~~212⁰54~~

211⁰54

312⁰50

blau/grün

~~213⁰2~~

213⁰3

311⁰49

grün

~~213⁰43~~

213⁰42

311⁰5

rot

~~214⁰3~~

214⁰18

310⁰30

Gitter grüne Linie

links

rechts

0. Ordnung $626^{\circ}25'$

1 265⁰33'

253⁰16'

2 268⁰41'

256⁰7'

3 271⁰50'

252⁰57'

4 275⁰2'

245⁰44'

blau $\lambda = 435,833 \text{ nm}$

gelb $\lambda = 526,964 \text{ nm}$ näher an grün

links

rechts

links

rechts

1 269⁰54'

259⁰54'

1 268⁰42'

259⁰6'

2 267⁰25'

257⁰24'

2 269⁰3'

255⁰46'

3 269⁰55'

254⁰53'

3 272⁰22'

252⁰24'

4 nicht unterscheiden

4 275⁰45'

243⁰2'

5 279⁰8'

245⁰35'

Natriumdampfampe

gltz gllt Doblett

links

rechts

1 $265^{\circ} 49'$

$253^{\circ} 3'$

2 $263^{\circ} 12'$

$255^{\circ} 39'$

als der Na
links
auswärtig

3 $272^{\circ} 37''$

$252^{\circ} 14'$

4 $276^{\circ} 6'$

$248^{\circ} 47'$

5 $279^{\circ} 36'$

$245^{\circ} 17'$

6 $283^{\circ} 12'$

$241^{\circ} 45'$

Prisma

D Linien

links
 $310^{\circ} 35'$

rechts
 $214^{\circ} 8'$

13.3.14