

Protokoll: Grundpraktikum II O10 - Linsensysteme

Sebastian Pfitzner

10. März 2014

Durchführung: Anna Andrle (550727), Sebastian Pfitzner (553983)

Arbeitsplatz: Platz 4

Betreuer: Valentina Scherer

Versuchsdatum: 07.03.2014

Abstract

In diesem Versuch geht es um die Untersuchung von zwei Linsen sowie einem aus ihm aufgebauten Linsensystem. Dafür wird die Brennweite der Einzellinsen mit der Bessel-Methode bzw. mit einem Sphärometer bestimmt, während die Brennweite sowie der Abstand der Hauptschnitte im Linsensystem durch die Abbe-Methode gemessen werden. Mithilfe einer grafischen Konstruktion können die Ergebnisse der Abbe-Methode überprüft werden.

Inhaltsverzeichnis

1	Messwerte und Auswertung	2
1.1	Bestimmung der Brennweiten der Einzellinsen	2
1.1.1	Bessel-Methode - Linse 2	2
1.1.2	Sphärometer - Linse 3	2
1.2	Untersuchung des Systems beider Linsen	3
1.3	Grafische Konstruktion der Hauptschnitte	5
2	Ergebnisdiskussion	6
3	Anhang	8

1 Messwerte und Auswertung

1.1 Bestimmung der Brennweiten der Einzellinsen

Um die spätere Überprüfung der gewonnenen Messwerte zum Linsensystem zu ermöglichen, werden zuerst die beiden Linsen einzeln auf ihre Brennweite untersucht. Die Brennweite der Sammellinse (Linse Nr. 2) wird mit der Besselmethode bestimmt, während die der Zerstreuungslinse (Linse Nr. 3) über die Messung der Radien berechnet wird.

1.1.1 Bessel-Methode - Linse 2

Bei einem festen Abstand zwischen Gegenstand und Schirm l (größer der vierfachen Brennweite der Linse) werden zwei Linsenpositionen gefunden, bei denen ein scharfes Bild entsteht. Aus dem Unterschied der Linsenpositionen $e = |x_1 - x_2|$ lässt sich laut dem grünen Skript ([2], Seite 48, Formel 9.5) die Brennweite der Linse und ihre Unsicherheit wie folgt berechnen:

$$f = \frac{l^2 - e^2}{4l} \quad (1)$$

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{l^2 - e^2}{4l^2}\right)^2 \cdot \Delta l^2 + \left(-\frac{e}{2l}\right)^2 \cdot \Delta e^2} \quad (2)$$

Gemessen werden x_1 und x_2 sowie l . Deren Unsicherheit ergibt sich aus pythagoraischer Addition eines Ablesefehlers von 0,5 mm für x_1 und x_2 sowie 1 mm für l und einem systematischen Messgerätefehler von $0,6 \text{ mm} + 0,4 \text{ mm/m} \cdot x$ (siehe [3]). Dank der Differenzbildung bei der Berechnung von e muss nur der systematische Restfehler des Maßbands über die Distanz e berücksichtigt werden.

Aus den aufgenommenen zehn Werten für die beiden Distanzen x_1 und x_2 sowie l lässt sich also die Brennweite samt ihrer Unsicherheit berechnen. Da sich die Unsicherheiten der einzelnen Werte von f überlappen, lässt sich ein gewichtetes Mittel bilden, welches das nachfolgende Resultat liefert:

$$\bar{f}_{L2} = (16,26 \pm 0,09) \text{ cm}$$

1.1.2 Sphärometer - Linse 3

Mit einem Sphärometer können die Krümmungsradien sphärischer Linsen vermessen werden. Dafür wird die Höhendifferenz zwischen einem (aufgrund der Kugel­form der Linse beliebig gewählten) Mittelpunkt und drei anderen Punkten in einem Abstand $r = 1,5 \text{ mm}$ zu diesem gemessen. Daraus ergeben sich unter Verwendung

folgender Formel (aus [2], Seite 49, Formel 9.6) die Linsenradien R_i für die konkave Seite $i = \text{kk}$ und die konvexe Seite $i = \text{kv}$:

$$R_i = \frac{r^2}{2h_i} + \frac{h_i}{2} \quad (3)$$

Die Unsicherheit für die R_i wird aufgrund der Angaben im dem Sphärometer beiliegenden Informationsblatt auf $\pm 1,5 \text{ mm}$ abgeschätzt.

Die Brennweite der Linse sowie ihre Unsicherheit (nach gaußscher Fehlerfortpflanzung) ergibt sich dann wie folgt:

$$f = \frac{1}{(n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_{\text{kk}}} - \frac{1}{R_{\text{kv}}} \right)} \quad (4)$$

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\Delta R_{\text{kk}}}{(n-1) \cdot R_{\text{kk}}^2 \left(\frac{1}{R_{\text{kk}}} - \frac{1}{R_{\text{kv}}} \right)^2} \right)^2 + \left(\frac{\Delta R_{\text{kv}}}{(n-1) \cdot R_{\text{kv}}^2 \left(\frac{1}{R_{\text{kk}}} - \frac{1}{R_{\text{kv}}} \right)^2} \right)^2} \quad (5)$$

Das ergibt als Ergebnis eine Brennweite von

$$f_{\text{L3}} = -(39 \pm 5) \text{ cm}$$

1.2 Untersuchung des Systems beider Linsen

Die beiden bereits untersuchten Linsen werden in einem Abstand von $d = 6 \text{ cm}$ fixiert. Zur Untersuchung dieses Systems wird bei verschiedenen Abständen x zwischen Gegenstand und einer Kante des Linsensystems das Bild auf dem Schirm durch Anpassung des Abstandes L zwischen Gegenstand und Schirm scharfgestellt (Methode von Abbe). Die auf dem Schirm angebrachten Markierungen im Abstand von $(20,0 \pm 0,5) \text{ mm}$ definieren eine feste Bildgröße, zu der für jedes x die passende Gegenstandsgröße notiert wird.

Die so gewonnenen Messwerte für G erlauben eine Berechnung des Verhältnisses zwischen Bild- und Gegenstandsgröße $\gamma = B/G$. Aus diesem lässt sich der Abstand x zwischen Gegenstand und Linsensystem wie folgt berechnen:

$$x = f \cdot \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) + c \quad (6)$$

Da nun x und γ bekannt sind, lässt sich ein linearer Fit anfertigen, der die beiden Parameter f und c liefert (Abbildung 1). Dabei ergibt sich die Unsicherheit von x wie schon zuvor zu $\Delta x = \sqrt{(0,5 \text{ mm})^2 + (0,6 \text{ mm} + 0,4 \text{ mm/m} \cdot x)^2}$, während die von $1/\gamma$ demgegenüber mit rund 3% Relativfehler vernachlässigbar klein ist.

Nun wird die Versuchsanordnung um 180° gedreht und wiederum Messwerte für den Abstand x' zwischen Gegenstand und gleicher Kante des Linsensystems sowie

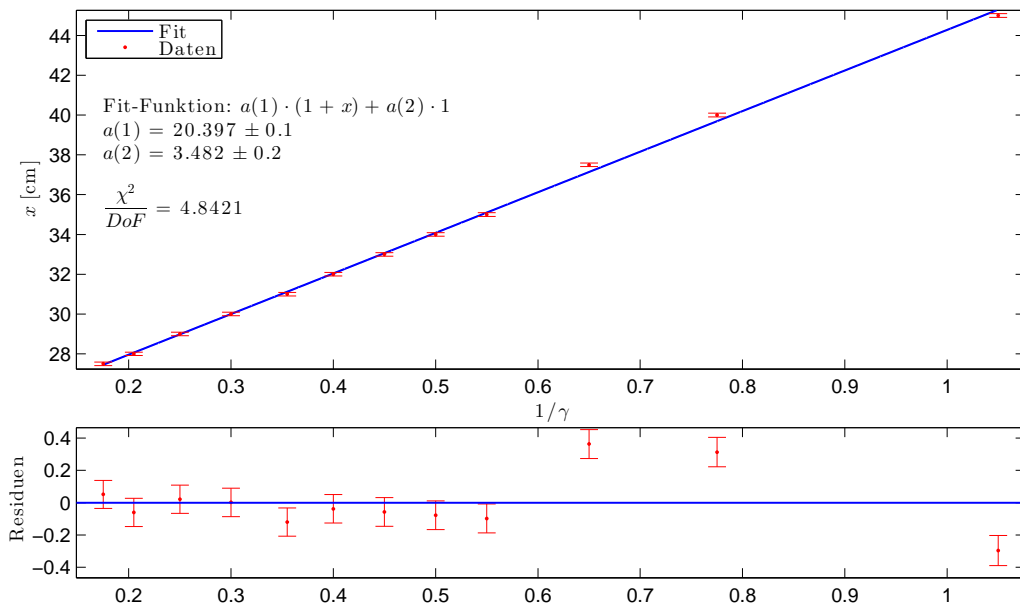


Abb. 1: Fit der Abhängigkeit des Abstands x zwischen Linsensystem und Gegenstand in Abhängigkeit von $1/\gamma$, wobei die bikonkave Linse zuerst im Strahlengang steht

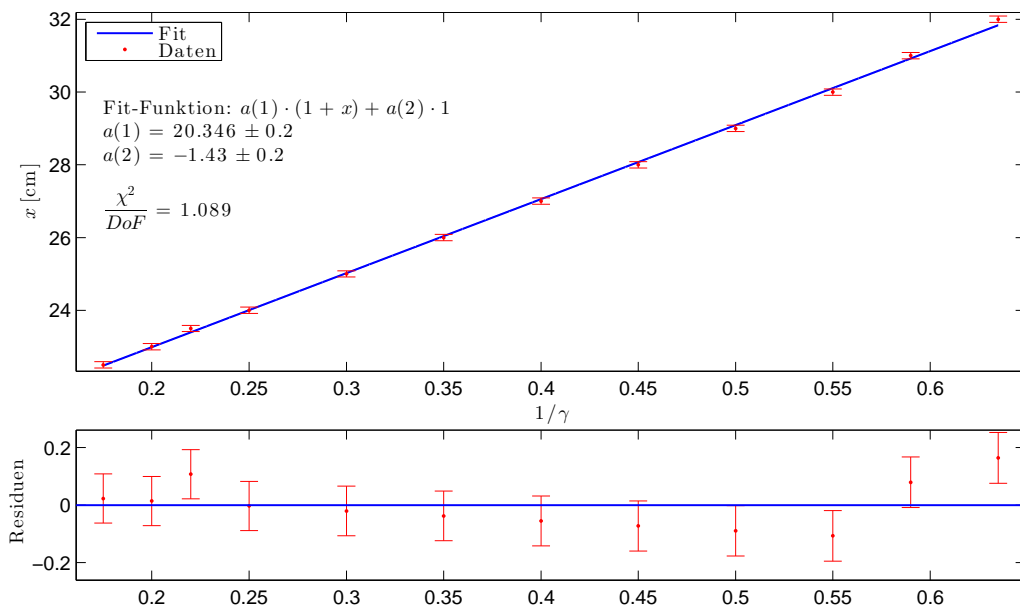


Abb. 2: Fit der Abhängigkeit des Abstands x zwischen Linsensystem und Gegenstand in Abhängigkeit von $1/\gamma$, wobei die konkav-konvexe Linse zuerst im Strahlengang steht

die Gegenstandsgröße G' aufgenommen. Daraus ergeben sich (mit der gleichen Fit-Funktion wie schon zuvor) eine Brennweite f' und ein Offset c' (siehe Abbildung 2).

Die Brennweite des Linsensystems ergibt sich aus dem gewichteten Mittel der beiden Fitparameter a_1 und a'_1 wie folgt:

$$\bar{f}_L = (20,4 \pm 0,1) \text{ cm}$$

Der Abstand d der Hauptschnitte sowie dessen Unsicherheit ergibt sich aus

$$d = c + c' \tag{7}$$

$$\Delta d = \sqrt{\Delta c^2 + \Delta c'^2} \tag{8}$$

Es folgt

$$d = (2,0 \pm 0,3) \text{ cm}$$

1.3 Grafische Konstruktion der Hauptschnitte

Um die Lage der Hauptschnitte sowie die Brennweite des Linsensystems zu bestimmen, kann auch eine grafische Konstruktion vorgenommen werden, wofür natürlich die Brennweiten der beiden Linsen bekannt sein müssen. Allerdings ist aufgrund der großen Brennweite von $L3$ keine Konstruktion im Maßstab 1:2 möglich, sodass auf 1:3 ausgewichen wird.

Zuerst wird anhand eines gegenstandsseitigen Parallelstrahls die Position der Hauptebene H' bestimmt. Der Parallelstrahl wird an der ersten Linse, $L2$, zum bildseitigen Brennpunkt $F2$ hin gebrochen. Allerdings trifft er dann auf die Zerstreuungslinse $L3$, wo er wiederum gebrochen wird. Das lässt sich durch einen dazu parallelverschobenen Mittelpunktstrahl durch $L3$ konstruieren, da sich alle (schräg einfallenden) Parallelstrahlen in einem Punkt in der Brennebene von $L3$ schneiden. Dadurch sind nun zwei Punkte auf dem an $L3$ gebrochenen Strahl bekannt und es lässt sich der bildseitige Brennpunkt des Linsensystems bestimmen. Aus dem Schnittpunkt zwischen gegenstandsseitigem Parallelstrahl und dem eben bestimmten bildseitigen Brennpunktstrahl ergibt sich die Position der Hauptebene H' .

Für die Bestimmung der Hauptebene H wird analog vorgegangen, allerdings fällt nun ein bildseitiger Parallelstrahl auf das Linsensystem und wird nach zweimaliger Brechung zu einem gegenstandsseitigen Brennpunktstrahl. Die Position von H ergibt sich aus dem Schnittpunkt dieser beiden Strahlen.

Aus der Konstruktion (siehe Anhang) lassen sich nun unter Berücksichtigung des Maßstabs folgende Werte für die bild- und gegenstandsseitigen Brennweiten

f_{Kb} , f_{Kg} (hier lässt sich nun ein gewichtetes Mittel bilden) sowie der Abstand d der Hauptebenen ablesen:

$$f_{Kg} = (22,2 \pm 0,6) \text{ cm}$$

$$f_{Kb} = (21,3 \pm 0,6) \text{ cm}$$

$$\bar{f}_K = (21,8 \pm 0,4) \text{ cm}$$

$$d_K = (1,2 \pm 0,6) \text{ cm}$$

Die Unsicherheiten der Werte werden hier aus der Ableseungenauigkeit sowie aus der Ungenauigkeit bei der Konstruktion, insbesondere bei der Parallelverschiebung abgeschätzt.

2 Ergebnisdiskussion

Die für die beiden Linsen gewonnenen Brennweiten können in Abhängigkeit von der Methode mit äußerst verschiedenen Unsicherheiten bestimmt werden. Die Bessel-Methode bietet hier offensichtliche Vorteile, denn sie erlaubt die Bestimmung der Brennweite bis auf 1 mm genau. Mit dem Sphärometer ist dies so nicht möglich, da die Unsicherheit von 1,5 mm nicht auf die Messung sondern aufs Messmittel zurückzuführen ist und sich demzufolge aufgrund ihrer systematischen Natur durch eine statistische Betrachtung nicht verringern lässt. Das hat eine Unsicherheit der Brennweite von rund 5 cm zur Folge.

Die Methode von Abbe liefert für die Brennweite des Systems sowie den Abstand zwischen den beiden Hauptebenen gute Werte mit verhältnismäßig geringen Unsicherheiten. Die Brennweite lässt sich bis auf 0,5 % genau bestimmen, während für den Abstand der Hauptschnitte nur eine Genauigkeit bis auf 15 % erreicht wird.

Die in den Fits auftretenden χ^2/DoF -Werte liegen nah am Erwartungswert von 1, was auf ein passendes Fitmodell sowie realistisch abgeschätzte Unsicherheiten schließen lässt.

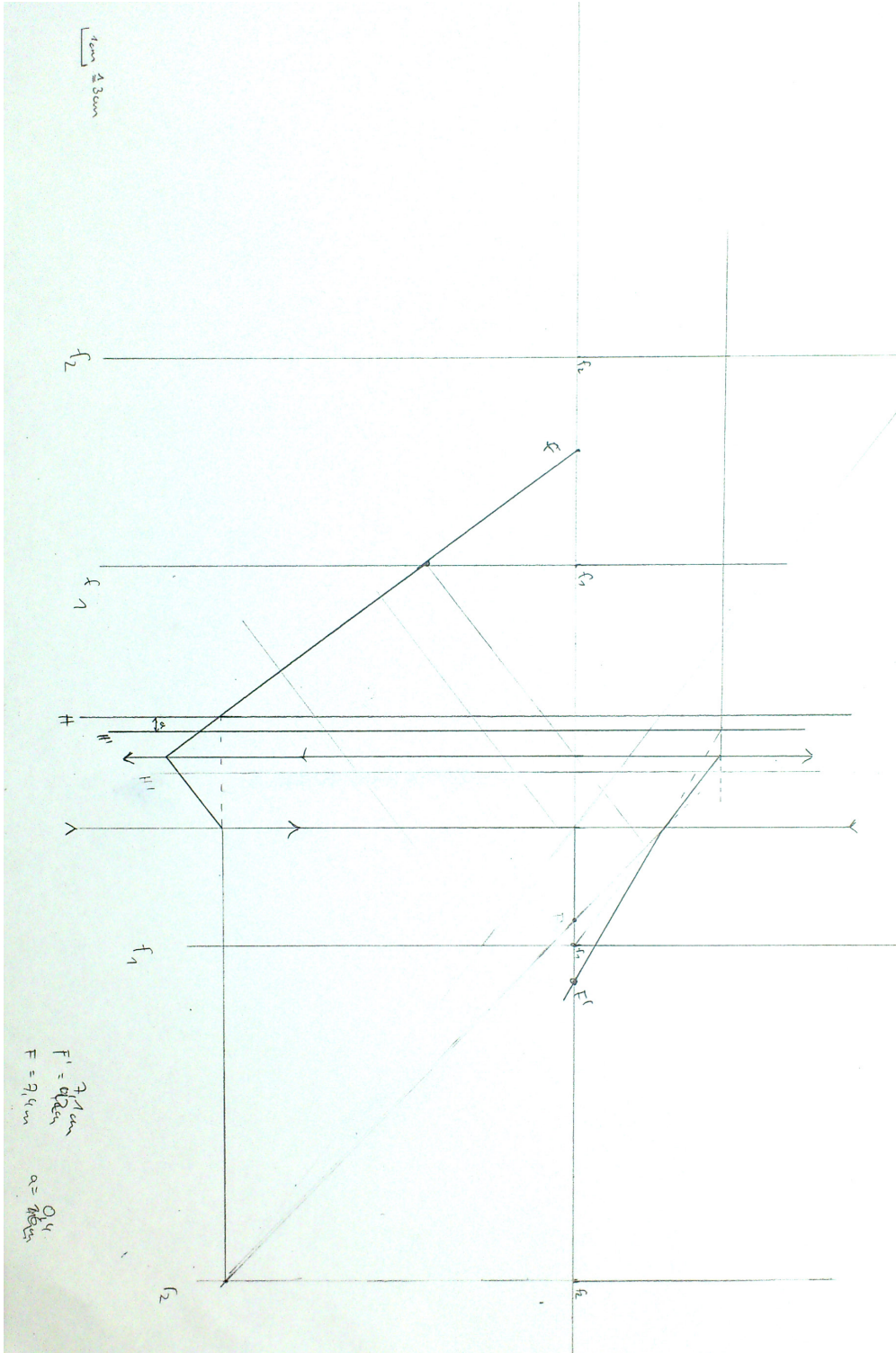
Die Konstruktion liefert eine mit dem Experiment durchaus vergleichbare Brennweite, allerdings überschneiden sich die Unsicherheiten der beiden Werte nicht. Bei dem Abstand der Hauptebenen tritt eine starke Diskrepanz auf, was einerseits auf schlecht abschätzbare Unsicherheiten beim Konstruieren (insbesondere bei der Konstruktion der Hilfsparallelen) und andererseits auf die zwangsläufige Rundung der verwendeten Werte zurückzuführen ist. Weiterhin ist der Abstand zwischen den Linsenmitten nur schwer zu bestimmen, woraus ebenfalls eine Unsicherheit der Ergebnisse aus der Konstruktion folgt. Auch die Unsicherheit der Brennweite von $L3$ geht in die Konstruktion stark ein.

Zum Vergleich wird sowohl die Brennweite als auch der Abstand zwischen den Hauptebenen mit der Matrixmethode [4] bestimmt. Diese Berechnung liefert für die

Brennweite $f_b = 22 \text{ cm}$ und $d_b = 1,24 \text{ cm}$. Dies stimmt gut mit den aus der Konstruktion gewonnenen Ergebnissen überein, basiert aber auch auf dem fehlerbehafteten Abstand zwischen den beiden Linsen sowie auf der mit großer Unsicherheit behafteten Brennweite von L_3 .

Eine mögliche Erklärung dafür ist ein nicht beachteter systematischer Fehler in der Bestimmung nach der Methode von Abbe oder aber in der Bestimmung einer oder beider Brennweiten der Einzellinsen liegt ein Fehler vor, denn in die Methode von Abbe gehen diese nicht ein.

3 Anhang



Literatur

- [1] MÜLLER, U. : *Physikalisches Grundpraktikum - Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik*. <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Elektrodynamik%20und%20Optik/PDF-Dateien/Elektrodynamik%20und%20Optik.pdf>. Version: 2007
- [2] MÜLLER, U. : *Physikalisches Grundpraktikum - Elektrodynamik und Optik*. <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Elektrodynamik%20und%20Optik/PDF-Dateien/Elektrodynamik%20und%20Optik.pdf>. Version: 2010
- [3] <http://de.wikipedia.org/wiki/Ma%C3%9Fband>
- [4] <http://photonik.physik.hu-berlin.de/Lehre/WS13P2C/Optik6.pdf>