Protokoll Grundpraktikum: O1 Dünne Linsen

Sebastian Pfitzner

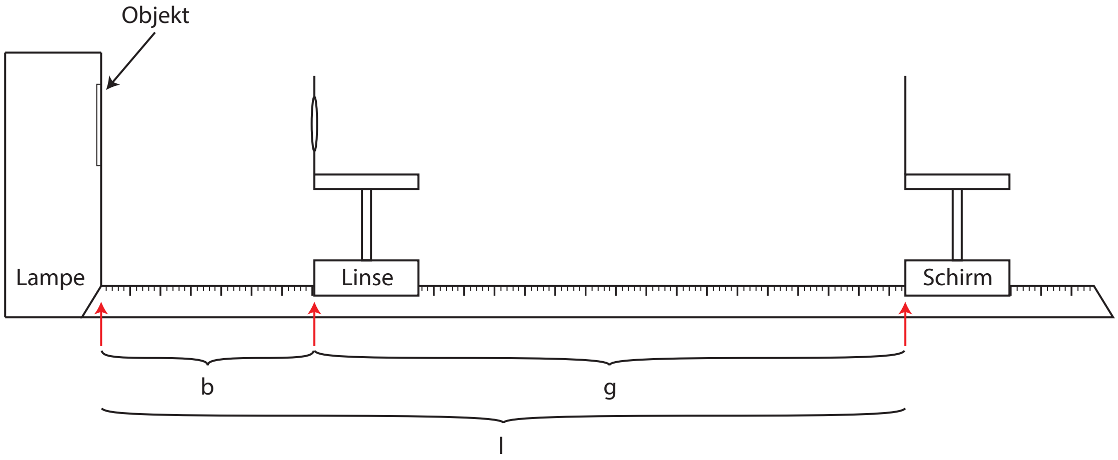
22. Januar 2013

Durchführung: Sebastian Pfitzner (553983), Jannis Schürmer (552892)
Arbeitsplatz: 3
Betreuer: A. Ahlrichs
Versuchsdatum: 16.01.2013

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbetrachtungen

Ziel dieses Versuches ist die Bestimmung der Brennweite der Sammellinse mit der Bezeichnung 3/2. Hierzu wurden zwei Methoden verwendet, die im weißen Skript des Einführungspraktikums genau beschrieben sind: Die Brennweitenbestimmung durch die Abbildungsgleichung und die Besselmethode. Diese unterscheiden sich hauptsächlich in der möglichen zu erreichenden Genauigkeit, wie auch in der Auswertung der Messwerte deutlich wird.



Gemessen wurden jeweils die Absolutabstände zum Objekt an den durch die roten Pfeile gekennzeichneten Positionen.

2 Messwerte

2.1 Brennweitenbestimmung durch Abbildungsgleichung

In nebenstehender Tabelle sind die zehn Messwerte des Abstandes zwischen Objekt und Schirm aufgetragen. Für den Abstand zwischen Objekt und Linse wurden $g = 13{,}0\,\text{cm}$ gemessen.

Der Mittelwert und die Standardabweichung der gemessenen Längen beträgt

$$\bar{l} = \sum_{i=1}^{10} \frac{l_i}{10} = 80{,}36\,\text{cm}$$

$$\sigma_l = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10} v_i^2} = 0{,}65\,\text{cm}$$

Messung	l_i in cm	v_i^2 in cm^2
1	80,0	0,116
2	80,5	0,026
3	80,4	0,004
4	80,8	0,212
5	79,7	0,410
6	80,0	0,314
7	79,9	0,194
8	81,7	1,850
9	79,9	0,194
10	79,8	0,292

Der zufällige Messabweichungen $\Delta_{l,z}$ lässt sich dank ausreichender Stichprobengröße mit $n \geq 6$ durch den Vertrauensbereich (mit $t = 1$) ausdrücken:

$$\Delta_{l,z} = \bar{\sigma} = \pm t \frac{\sigma}{\sqrt{10}}$$

$$\Delta_{l,z} = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^{10} \frac{(l_i - \bar{l})^2}{90}} = \pm 0{,}20\,\text{cm}$$

In dieser statistischen Betrachtung ist die Messungenauigkeit, die durch das subjektive Abschätzen der Schärfe der Abbildung auf dem Schirm entstand, bereits berücksichtigt, denn diese ist ein zufälliger Fehler. Mögliche systematische Abweichungen aufgrund des persönlichen Abschätzverhaltens wurden minimiert, indem nach fünf Messwerten die Schärfe vom jeweils anderen Durchführenden beurteilt wurde.

Die systematischen Messabweichungen $\Delta_{l,s}$ setzen sich aus einer möglichen ungenauen Ausrichtung des Nullpunktes des Maßbandes (mit $\Delta_{l,Ob} = 0{,}15\,\mathrm{cm}$ abgeschätzt) zum abzubildenden Objekt und der ihm inhärenten Ungenauigkeit (aus blauem Skript S. 17 entnommen) zusammen:

$$\Delta_{l,s} = \pm(|\Delta_{l,Ob}| + |\Delta_{l,Ma}|) = \pm(0{,}15\,\mathrm{cm} + 0{,}05\,\mathrm{cm} + 5 \cdot 10^{-5} \cdot 80{,}34\,\mathrm{cm}) = \pm 0{,}20\,\mathrm{cm}$$

Demzufolge beträgt die gesamte Messungenauigkeit $u \approx \pm|\Delta_{l,s}| + |\Delta_{l,z}| = \pm 0{,}40\,\mathrm{cm}$ und das vollständige Messergebnis lautet:

$$l = (80{,}3 \pm 0{,}4)\mathrm{cm}$$

Für die Messung der Gegenstandsweite g wurde keine Messreihe durchgeführt, da hier eine nicht näher bestimmbare systematische Ungenauigkeit von der halben Linsendicke, also $\Delta_{g,z} = 0{,}3\,\mathrm{cm}$, die möglichen zufälligen Fehler und auch den Teilungsfehler des Maßbandes überdeckt. Die gesamte Unsicherheit setzt sich also aus $\Delta_{g,z}$ und $\Delta_{g,s,Ob}$ zusammen und beträgt demzufolge $\Delta_g = \pm(|\Delta_{g,z}| + |\Delta_{g,s,Ob}|) = \pm 0{,}45\,\mathrm{cm}$. Das vollständige Messergebnis lautet deshalb:

$$g = (18{,}0 \pm 0{,}5)\mathrm{cm}$$

2.2 Besselmethode

In der nebenstehenden Messwertetabelle sind alle für die zur Berechnung der Brennweite nach der Besselmethode erforderlichen Werte aufgetragen. l_i sind hierbei die Abstände vom Objekt zum Schirm und $g_{1,i}$ sowie $g_{2,i}$ die Abstände zwischen Objekt und den beiden Linsenpositionen, die zu einem scharfen Bild führen. Das Intervall $l_{min} \leq l_i \leq l_{max}$ wurde so gewählt, dass die an der unteren Grenze die beiden verschiedenen Positionen der Linse noch gut zu unterscheiden waren und an der oberen Grenze noch eine vernünftige Einschätzung der Schärfe des Bildes möglich war.

Messung	l_i in cm	$g_{1,i}$ in cm	$g_{2,i}$ in cm
1	50,0	16,3	32,7
2	59,0	14,6	43,7
3	65,0	13,9	50,4
4	68,0	13,5	53,7
5	77,0	12,9	63,3
6	80,0	12,9	66,3
7	86,0	12,6	72,4
8	95,0	12,4	81,6
9	104,0	12,3	90,9
10	113,0	12,2	100,1
11	122,0	12,0	109,3
12	131,0	11,9	118,4

Eine statistische Auswertung der Messwerte ist natürlich sinnlos, aber eine statistische Betrachtung der Brennweiten wird im Auswertungsteil zu finden sein. Trotzdem müssen auch für die Messwerte Ungenauigkeiten angegeben werden. Die systematischen Messungenauigkeiten können als konstant angenommen werden, da der Term $0{,}05\,\mathrm{cm} + 5 \cdot 10^{-5} \cdot l$ nur einen Einfluss auf die hier vernachlässigte dritte Kommastelle hat.

$$\Delta_{l/g,s} = \pm(|\Delta_{l,Ob}| + |\Delta_{l,Ma}|)$$
$$\Delta_{l/g,s} = \pm(0{,}15\,\mathrm{cm} + 0{,}05\,\mathrm{cm} + 5 \cdot 10^{-5} \cdot (16{,}3 \ldots 131{,}0)\mathrm{cm}) = \pm 0{,}15\,\mathrm{cm}$$

Der zufällige Fehler kann nur abgeschätzt werden und beträgt

$$\Delta_{l,z} = \pm 0{,}15\,\mathrm{cm}$$
$$\Delta_{g,z} = \pm 0{,}3\,\mathrm{cm}$$

Hier wird er als konstant angenommen, obwohl eigentlich eine Abhängigkeit von l und g vorliegt, da die Intervalle, in denen das Bild auf dem Schirm dem menschlichen Auge scharf erscheint, sich mit diesen beiden Parametern verändert. Allerdings ist eine Abschätzung dieser Abhängigkeit sehr aufwändig und hat auf die Unsicherheit der Brennweite keinen signifikanten Einfluss, wie in der Auswertung und der zugehörigen Fehlerbetrachtung gezeigt wird.

Die Gesamtungenauigkeit für die beiden Messgrößen beträgt demnach:

$$\Delta_l = \pm(|\Delta_{l,z}| + |\Delta_{l/g,s}|) = \pm 0{,}3\,\mathrm{cm}$$
$$\Delta_g = \pm(|\Delta_{g,z}| + |\Delta_{l/g,s}|) = \pm 0{,}5\,\mathrm{cm}$$

Diese Ungenauigkeitsangabe kann für alle zugehörigen Messwerte angenommen werden.

3 Auswertung

3.1 Brennweitenbestimmung durch Abbildungsgleichung

Die Brennweite lässt sich nach der Abbildungsgleichung errechnen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$
$$f = \frac{b \cdot g}{b + g}$$
$$f = \frac{(l - g) \cdot g}{l}$$

Nach dem Einsetzen der Werte oben ermittelten Werte ergibt sich

$$f = \frac{[(80{,}3 \pm 0{,}4)\text{cm} - (18{,}0 \pm 0{,}5)\text{cm}] \cdot (18{,}0 \pm 0{,}5)\text{cm}}{(80{,}3 \pm 0{,}4)\text{cm}}$$
$$f = 10{,}89\,\text{cm}$$

Nach den Regeln der Fehlerfortpflanzung ist

$$\Delta_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)^2 \cdot \Delta_l^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)^2 \cdot \Delta_g^2 + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial f}{\partial l} \cdot s_{gl}}$$

In diesem Fall ist die Kovarianz s_{gl} zumindest formell gleich Null, da sie sich durch $s_{gl} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (g_i - \bar{g}) \cdot (l_i - \bar{l})$ berechnet und da bei nur einem Messwert zwangsläufig $(g_i - \bar{g}) = 0$ gilt.

Die Ungenauigkeit der resultierenden Brennweite beträgt also

$$\Delta_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)^2 \cdot \Delta_l^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)^2 \cdot \Delta_g^2}$$
$$\Delta_f = \sqrt{\frac{g^4}{l^4} \cdot \Delta_l^2 + \left(1 - 4\frac{g}{l} + 4\frac{g^2}{l^2}\right) \cdot \Delta_g^2} = 0{,}30\,\text{cm}$$

Die mithilfe der Abbildungsgleichung gewonnen Brennweite beträgt demzufolge

$$f_{Abb} = (10{,}9 \pm 0{,}3)\,\text{cm}$$

3.2 Besselmethode

Auch wenn diese Messwerte eigentlich zur Bestimmung der Brennweite mithilfe der Besselmethode gedacht waren, wurden zum Vergleich auch die Brennweiten mithilfe der Abbildungsgleichung aus dem vorherigen Kapitel ermittelt. In der nebenstehenden Tabelle wurden diese Brennweiten, jeweils der Mittelwert von einem Paar f_1 und f_2 sowie die Quadrate der scheinbaren Messabweichungen aufgetragen.

f_1 (cm)	f_2 (cm)	$\bar{f}$ (cm)	v^2 $(10^{-2} \cdot \text{cm}^2)$
10,99	11,31	11,15	0,155
10,99	11,33	11,16	0,240
10,93	11,32	11,12	0,018
10,82	11,29	11,06	0,297
10,74	11,26	11,00	1,213
10,82	11,35	11,09	0,057
10,75	11,45	11,10	0,008
10,78	11,51	11,15	0,122
10,85	11,45	11,15	0,135
10,88	11,43	11,16	0,196
10,82	11,38	11,10	0,014
10,82	11,39	11,10	0,005

Der Mittelwert aller Mittelwerte, die Standardabweichung und das Konfidenzintervall betragen

$$\bar{f}_{Abb,2} = 11{,}11\,\mathrm{cm}$$
$$\sigma = 0{,}05\,\mathrm{cm}$$
$$\bar{s} = \pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \pm 0{,}01\,\mathrm{cm}$$

Auf eine eingehendere Fehlerbetrachtung wird aufgrund der Ähnlichkeit zum letzten Kapitel und dem sehr schmalen Vertrauensbereich verzichtet. Die Unsicherheit wird mit einer doppelten Standardabweichung abgeschätzt, sodass das vollständige Ergebnis wie folgt lautet:

$$f_{Abb,2} = (11{,}1 \pm 0{,}1)\mathrm{cm}$$

Für die eigentliche Brennweitenbestimmung mithilfe der Besselmethode wird zunächst die Differenz e zwischen g_2 und g_1 berechnet und, woraus sich dann folgendermaßen die Brennweiten f_e ergeben:

$$f_e = \frac{l^2 - e^2}{4l}$$

Damit diese Formel anwendbar ist, muss l mindestens vier mal so groß wie f sein, was aus den Brennweiten im ersten Teil des Versuchs abgeschätzt wurde. Der Mittelwert und die Standardabweichung der einzelnen nebenstehenden Brennweiten beträgt:

e in cm	f_e in cm	v^2 (10^{-3}cm)
16,4	11,15	1,78
29,1	11,16	2,39
36,5	11,13	0,17
40,2	11,06	2,95
50,4	11,00	12,15
53,4	11,09	0,58
59,8	11,10	0,07
69,2	11,15	1,25
78,6	11,15	1,31
87,9	11,16	1,87
97,3	11,10	0,17
106,5	11,10	0,07

$$\bar{f}_e = \sum_{i=1}^{11} \frac{f_{e,i}}{11} = 11{,}11\,\mathrm{cm}$$
$$\sigma_l = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{11} v_i^2} = 0{,}05\,\mathrm{cm}$$

Der Vorteil der Besselmethode ist, dass beim Bestimmen des Abstandes e systematische Fehler (auch der durch die nicht bestimmbare Position der Linsenmitte hervorgerufene) weitgehend entfallen, da diese bei beiden Messungen gleichermaßen ins Gewicht fallen und demzufolge auf ihre Differenz keinen Einfluss haben. Der Gesamtfehler für diese Größe kann mit $\Delta_e = \pm 1\,\mathrm{mm}$ abgeschätzt werden, da nur Ablesefehler berücksichtigt werden müssen. Für Δ_l wird wie in 2.2 beschrieben eine konstante Ungenauigkeit von $\Delta_l = \pm 0{,}3\,\mathrm{cm}$ abgeschätzt.

Demzufolge gilt (exemplarisch für den ersten Wert)

$$\Delta_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)^2 \cdot \Delta_l^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial e}\right)^2 \cdot \Delta_e^2}$$

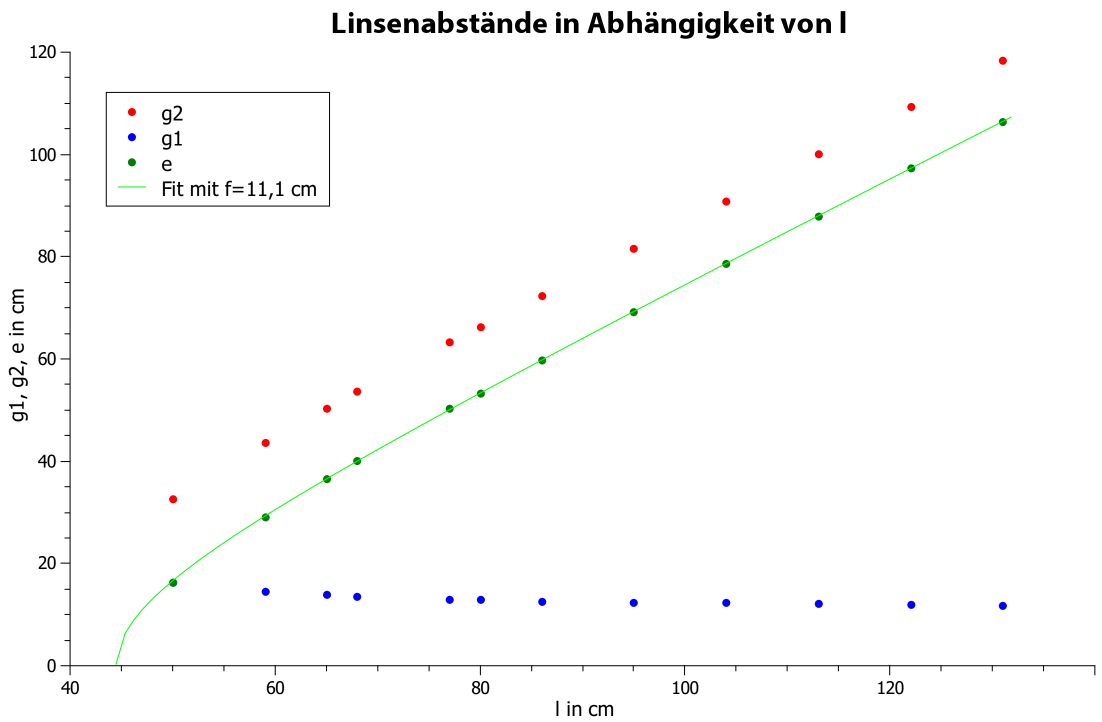
$$\Delta_f = \sqrt{\left(-\frac{e_1}{2l_1}\right)^2 \cdot \Delta_{l_1}^2 + \left(\frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{e_1^2}{l_1^2}\right)\right)^2 \cdot \Delta_e^2} = 0{,}06\,\mathrm{cm}$$

Die durch die Fehlerfortpflanzung entstandene Unsicherheit erhöht sich bei größeren Abständen, allerdings wurden die einzelnen Brennweiten bereits gemittelt. Demzufolge muss die gleiche Mittlung auch auf die Fehler angewandt werden (Addition der Absolutfehler bei Addition der fehlerbehafteten Größen), was einen Mittelwert der resultierenden Ungenauigkeit von

$$\bar{\Delta}_f = 0{,}10\,\mathrm{cm}$$

liefert. Das vollständige Ergebnis lautet also

$$f_e = (11{,}1 \pm 0{,}1)\mathrm{cm}$$

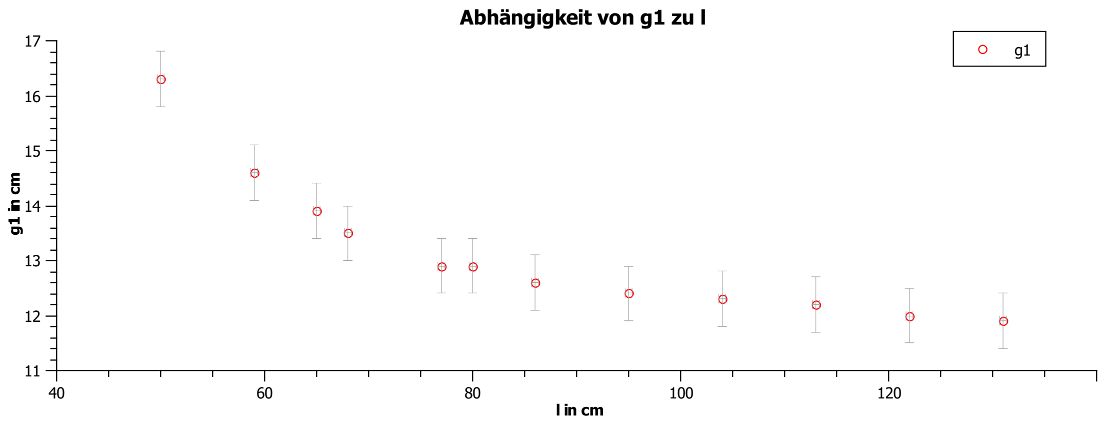


Im vorangestellten Diagramm sind g_1, g_2 und e in Abhängigkeit von l aufgetragen. Es ist erkennbar, dass sich die beiden Linsenabstände bei großen Entfernungen zwischen Schirm und Objekt linear verhalten, und für $l \cong 4 \cdot f$ stark zueinander streben. Dies deckt sich auch mit den Beobachtungen, den bei $l = 45\,\mathrm{m}$ waren die beiden Linsenabstände $g_{1,2}$ nicht mehr auseinanderzuhalten. Dieses Verhalten zeigt sich auch durch den Fit an e, der mithilfe von QtiPlot durchgeführt wurde und mit der Funktion

$$e = \sqrt{l^2 - 4 \cdot l \cdot f}$$

bei freiem Parameter f eine Brennweite von $f_{fit} = (11{,}1 \pm 0{,}13)\mathrm{cm}$ liefert. Die Nullstelle dieser Funktion fällt mit der Entfernung l zusammen, bei der sich auch die g_1 und g_2 repräsentierenden Funktionen treffen. Auf Fehlerkreuze wurde in dieser Darstellung verzichtet, da sie im vorliegenden Maßstab keine wertvollen Erkenntnisse liefern würden.

Im nachfolgenden Diagramm ist g_1 erneut in einem anderen Maßstab aufgetragen, der es erlaubt, den nicht linearen Verlauf zu erkennen. Weiterhin wurden Unsicherheitskreuze mit $\Delta_{g_1} = 0{,}5\,\mathrm{cm}$ und $\Delta_l = 0{,}3\,\mathrm{cm}$ eingezeichnet.



4 Vergleich der Ergebnisse

Insgesamt wurden vier Ergebnisse erarbeitet:

$$f_{Abb} = (10{,}9 \pm 0{,}3)\,\mathrm{cm}$$
$$f_{Abb,2} = (11{,}1 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$$
$$f_e = (11{,}1 \pm 0{,}1)\mathrm{cm}$$
$$f_{fit} = (11{,}1 \pm 0{,}13)\mathrm{cm}$$

Vom Versuchsleiter ist das ein Vergleichsergebnis von

$$f_{ver} = 11{,}2\,\mathrm{cm}$$

bereitgestellt worden, über das allerdings keine Angaben bezüglich der Unsicherheit gemacht wurden. Es lässt sich allerdings sagen, dass alle vier selbst gemessenen

Werte um maximal ihre Unsicherheit vom Referenzwert abweichen. Interessanterweise sind die durch unseren Versuch gefundenen Brennweite konsequent zu niedrig eingeschätzt, es lässt sich allerdings nicht sagen, ob das einem nicht ganz exakten Referenzwert oder aber einem nicht berücksichtigten systematischen Messfehler (der ausgeglichen hätte werden können) zuzuschreiben ist.

Die im Abschnitt 3.2 gefundenen Brennweiten besitzen durchweg eine geringere Unsicherheit als die durch die Abbildungsgleichung gewonnene. Dies lässt sich einerseits auf die mehr als doppelt so hohe Messwertanzahl und für f_e auch auf die weniger fehleranfällige Methode zurückzuführen.