

Protokoll Grundpraktikum I: M9 - Reversionspendel

Sebastian Pfitzner

4. Juni 2013

Durchführung: Sebastian Pfitzner (553983), Anna Andrle (550727)

Arbeitsplatz: Platz 4

Betreuer: Peter Schäfer

Versuchsdatum: 29.05.2013

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|----------|
| 1 Abstract | 1 |
| 2 Messwerte und Auswertung | 2 |
| 2.1 Schneidenabstand | 2 |
| 2.2 Periodendauer in Abhängigkeit von der Masseverteilung | 2 |
| 2.3 Präzisionsmessung | 3 |
| 2.4 Winkelabhängigkeit der Periodendauer | 4 |
| 2.5 Bestimmung der lokalen Erdbeschleunigung | 5 |
| 3 Vergleich der Ergebnisse | 6 |
| 3.1 Winkelabhängigkeit der Periodendauer | 6 |
| 3.2 Erdbeschleunigung | 6 |

1 Abstract

Ziel dieses Versuchs ist die Bestimmung der Erdbeschleunigung g mit einem Reversionspendel. Dies ist möglich, da sich die Periodendauer dieses Pendels aus der lokalen Fallbeschleunigung und der reduzierten Pendellänge berechnen lässt (dazu kommt eine Korrektur für die Auftriebskraft und den Auslenkungswinkel). Dementsprechend wurden diese drei Größen T , l_r und φ möglichst präzise gemessen und daraus die lokale Erdbeschleunigung errechnet.

2 Messwerte und Auswertung

2.1 Schneidenabstand

Für den Schneidenabstand ergeben sich durch zehn Messungen mit einem fest installierten Messschieber die in Tabelle 1 dargestellten Ergebnisse. Die Dicke des Messschiebers beträgt $d = (10,03 \pm 0,03)\text{mm}$ und muss zum Mittelwert \bar{s} der Messergebnisse addiert werden, um den Schneidenabstand zu erhalten. Es gilt also $l_r = \bar{s} + d$.

Bei den Messungen wurde darauf geachtet, die maximal zulässige Geschwindigkeit von $v_{max} = 1 \text{ m s}^{-1}$ nicht zu überschreiten.

| | | | | | | | |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| s in mm | 973,11 | 973,10 | 973,15 | 973,14 | 973,14 | 973,13 | 973,13 |
| | 8 | 9 | 10 | | | mean | conf |
| s in mm | 973,11 | 973,11 | 973,11 | | | 973,12 | 0,005 |

Tab. 1: Messwerte sowie Mittelwert und Konfidenzintervall des gemessenen Abstandes s

Das Konfidenzintervall wird als zufälliger Beitrag zur Unsicherheit angesehen - für den Digitalisierungsfehler gilt $\Delta s_d = 0,01 \text{ mm}$, der systematische Fehler geht mit $\Delta s_{sys} = (0,02 + s \cdot 5 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^{-1})\text{mm}$ ein. Daraus ergibt sich durch Addition der Beträge ein Gesamtfehler von $\Delta s = 0,08 \text{ mm}$. Für den eigentlichen Abstand l zwischen den Schneiden ergibt sich also durch Addition der Werte und Unsicherheiten

$$l_r = (983,15 \pm 0,11)\text{mm}$$

Der hier ermittelte Schneidenabstand entspricht der reduzierten Pendellänge, wenn sich das Pendel im Reversionszustand befindet und wird im Folgenden auch so verwendet.

2.2 Periodendauer in Abhängigkeit von der Masseverteilung

Das bewegliche Massestück wurde systematisch verschoben und in jeder Position x die Periodendauern T_1 bei Aufhängung an der einen und T_2 bei Aufhängung an der anderen Schneide (nahe bei Masse 2) aufgenommen. Bei dieser Übersichtsmessung wurde jeweils eine Position x_i des Massenstücks M1 eingestellt und beide Periodendauern gemessen. Wie aus der Theorie zu erwarten, schneiden sich die so gewonnenen Kurven in zwei Punkten. In der Umgebung des zweiten Schnittpunktes bei $36 < x_2 < 37$ wurden noch weitere Werte aufgenommen, um diese Position besser eingrenzen zu können. Dieser zweite Schnittpunkt wird für die Präzisionsmessung benutzt, da die Kurven hier steiler aufeinanderstehen und damit im Rahmen ihrer Messungengenauigkeit den gesuchten Reversionszustand genauer definieren.

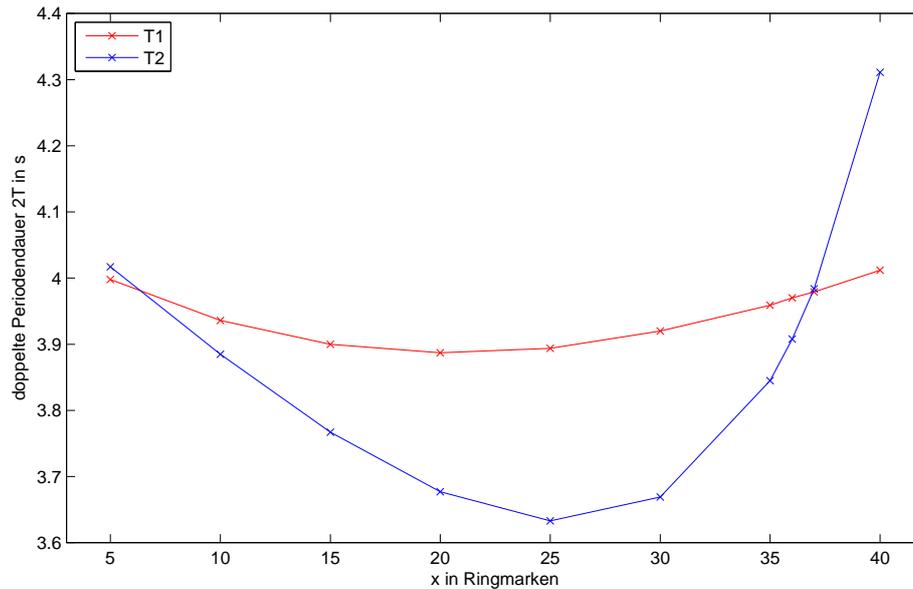


Abb. 1: zweifache Periodendauer $2 \cdot T$ in Abhängigkeit von der Position des beweglichen Massestücks

Für die Zeitmessung ergibt sich ein Gangfehler von einer Sekunde pro Tag, also $\Delta t_g = \frac{1}{86400} \cdot t$. Dazu kommt ein Digitalisierungsfehler von $\Delta t_d = 1 \cdot 10^{-3} \text{s}$. Andere Unsicherheiten könnten durch die Lichtschranke und durch Umwelteinflüsse zustande kommen - diese sind allerdings vernachlässigbar klein gegenüber den bereits erwähnten Fehlern.

Im Diagramm 1 sind keine Fehlerbalken eingetragen, da es sich nur um eine Übersicht handelt. Die beschriebenen Unsicherheiten sind allerdings bei der nachfolgenden Präzisionsmessung zu verwenden.

2.3 Präzisionsmessung

Zur genauen Bestimmung der Periodendauer im Reversionszustand des Pendels wird eine genauere Messung vorgenommen. Hierbei werden zehn Perioden gemessen, wobei vier Messwerte aufgenommen werden. Das Massenstück wird so eingestellt, dass der Reversionszustand fast erreicht ist; Dann wird es aufgeschraubt und jeweils ein Messwert für die Aufhängung an jeder Schneide aufgenommen. Nach dem Zuschrauben um eine Umdrehung werden wieder zwei Messwerte aufgenommen - der Reversionszustand liegt genau dazwischen und lässt sich durch den Schnittpunkt der beiden Kurven (die dank der Nähe der Datenpunkte als linear angenähert werden können) bestimmen.

Bei einer gleichbleibenden Auslenkung von jeweils 20 mm, entsprechend ungefähr $\varphi \approx \arctan\left(\frac{20\text{ mm}}{983,15\text{ mm}}\right) = 0,02\text{ rad} = 1,7^\circ$, ergeben sich folgende Periodendauern:

$$\begin{aligned} 10 \cdot T_{1,1} &= (19,888 \pm 0,001)\text{s} & 10 \cdot T_{1,2} &= (19,888 \pm 0,001)\text{s} \\ 10 \cdot T_{2,1} &= (19,876 \pm 0,001)\text{s} & 10 \cdot T_{2,2} &= (19,897 \pm 0,001)\text{s} \end{aligned}$$

Die Verbindungen der Punkte $T_{1,1}$ und $T_{1,2}$ sowie $T_{2,1}$ und $T_{2,2}$ lassen sich durch zwei lineare Funktionen beschreiben, wenn man als x-Werte 0 bzw. 1 setzt:

$$T_1 = (T_{1,2} - T_{1,1})x + T_{1,1} \quad T_2 = (T_{2,2} - T_{2,1})x + T_{2,1}$$

Daraus folgt dann aufgrund von $T(x) = T_1(x_1) = T_2(x_2) \Leftrightarrow x = x_1 = x_2$ folgende Bestimmungsgleichung für $T(x)$

$$T = \frac{T_{1,1}T_{2,2} - T_{1,2}T_{2,1}}{T_{2,2} + T_{1,1} - T_{1,2} - T_{2,1}} \quad (1)$$

Die Unsicherheit der Periodendauer lässt sich durch die gaußsche Fehlerfortpflanzung bestimmen:

$$\begin{aligned} \Delta T = & \left[\left(\frac{(T_{1,2} - T_{2,2})(T_{2,1} - T_{2,2})}{(T_{2,2} + T_{1,1} - T_{1,2} - T_{2,1})^2} \right)^2 \Delta T_{1,1}^2 + \left(-\frac{(T_{1,1} - T_{2,1})(T_{2,1} - T_{2,2})}{(T_{2,2} + T_{1,1} - T_{1,2} - T_{2,1})^2} \right)^2 \Delta T_{1,2}^2 \right. \\ & \left. + \left(-\frac{(T_{1,2} - T_{1,2})(T_{1,2} - T_{2,2})}{(T_{2,2} + T_{1,1} - T_{1,2} - T_{2,1})^2} \right)^2 \Delta T_{2,1}^2 + \left(\frac{(T_{1,2} - T_{1,2})(T_{1,1} - T_{2,1})}{(T_{2,2} + T_{1,1} - T_{1,2} - T_{2,1})^2} \right)^2 \Delta T_{2,2}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Für die Periodendauer ergibt sich dann folgendes Ergebnis:

$$T = (1,9888 \pm 0,0001)\text{s}$$

2.4 Winkelabhängigkeit der Periodendauer

Um zu überprüfen, ob die im Skript angegebene Korrektur für die Periodendauer

$$T(\varphi) = T \cdot \left(1 + \frac{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{4} \right) \quad (2)$$

mit den Versuchsdaten übereinstimmt, wurden weitere Messwerte aufgenommen, die im Anhang zu finden sind. Diese Daten wurden sodann aufgetragen und mit der Funktion (2) gefittet, wobei der Parameter T so optimiert wurde, dass χ^2 minimal wird. In den Abbildungen 2 und 3 (letzte Seite) ist dieser Zusammenhang zu erkennen.

Offensichtlich passen die Daten nur dann zum Modell, wenn ein möglichst mathematisches Pendel betrachtet wird. Das erscheint einleuchtend, wenn man bedenkt, dass die Formeln (3) und damit auch (2) aus der Differentialgleichung für ein mathematisches Pendel gewonnen wurde.

Aus der aus dem Fit gewonnenen Periodendauer von $T_{fit} = (1,988\,47 \pm 0,000\,04)\text{s}$ lässt sich mit Hilfe der Formel (3) ein Wert für die lokale Erdbeschleunigung und mit (4) die Unsicherheit gewinnen.

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot l_r}{T^2} \quad (3)$$

$$\Delta g = \sqrt{\frac{16\pi^4 \Delta l^2}{T^4} + \frac{64l^2\pi^4 \Delta T^2}{T^6}} \quad (4)$$

Das vollständige Ergebnis dafür lautet

$$g_{fit} = (9,816 \pm 0,001) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

2.5 Bestimmung der lokalen Erdbeschleunigung

Die Erdbeschleunigung lässt sich aus der Präzisionsmessung bestimmen. Hierfür wird die um die Einflüsse des Auslenkungswinkels sowie der Auftriebskraft korrigierte Formel (5) verwendet. Die Winkelkorrektur erscheint sinnvoll, wie im vorherigen Kapitel gezeigt. Trotzdem wird weiter unten noch das unkorrigierte Ergebnis berechnet.

$$g_c = \left(\frac{2\pi}{T(\varphi)} \right)^2 l_r \left(1 + \frac{\varphi^2}{8} + \frac{\rho_L}{\rho_{Pe}} \right) \quad (5)$$

Für die Berechnung der Unsicherheit werden die Massendichten als fehlerfrei angenommen. φ ist zwar fehlerbehaftet, hat aber einen vernachlässigbar kleinen Einfluss auf die Unsicherheit - deswegen wird dieser Term bei der Fehlerfortpflanzung ebenfalls nicht berücksichtigt. Es ergibt sich

$$\Delta g_c = \sqrt{\frac{16 \cdot \pi^4 \left(1 + \frac{\rho_L}{\rho_{Pe}} + \frac{\varphi^2}{8} \right)^2}{T(\varphi)^4} \Delta l^2 + \frac{64 \cdot l^2 \pi^4 \left(1 + \frac{\rho_L}{\rho_{Pe}} + \frac{\varphi^2}{8} \right)^2}{T(\varphi)^6} \Delta T(\varphi)^2} \quad (6)$$

Das vollständige Ergebnis lautet demzufolge

$$g_c = (9,815 \pm 0,001) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Für die Berechnung der nicht um die Einflüsse von Auftriebskraft und Auslenkung bereinigten Gravitationsbeschleunigung wird die bekannte Gleichung für ein mathematisches Pendel verwendet:

$$g_u = 4\pi^2 \frac{l_r}{T^2} \quad (7)$$

Die Unsicherheit des Endergebnisses kann wieder durch die gaußsche Fehlerfortpflanzung gewonnen werden:

$$\Delta g_u = \sqrt{\frac{16 \cdot \pi^4}{T^4} \Delta l^2 + \frac{64 \cdot l^2 \pi^4}{T^6} \Delta T^2} \quad (8)$$

Das unkorrigierte Ergebnis lautet also:

$$g_u = (9,813 \pm 0,001) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

3 Vergleich der Ergebnisse

3.1 Winkelabhängigkeit der Periodendauer

Aus den graphischen Darstellungen ist abzulesen, dass die Korrektur der Messwerte für verschiedene Auslenkungswinkel nur für ein mathematisches Pendel Sinn macht. Es gilt für den Wert des reduzierten Chi-Quadrat $\frac{\chi^2}{DoF} = 3,75 \approx 1$, was auf eine gute Übereinstimmung zwischen Modell und Messdaten schließen lässt. Auch der optimierte Parameter - hier die zehnfache Periodendauer - liefert einen Wert, der in bis auf die dritte Nachkommastelle mit den Messwerten übereinstimmt. Für mathematisches Pendel ist die im Skript gelieferte Korrektur der Messwerte sinnvoll.

Für ein physikalisches Pendel, bei dem sich der Hauptteil der Masse in der Nähe der Aufhängung befindet, gilt dies allerdings nicht. Die Theorie stimmt nicht mit den Daten überein, die Abweichungen lassen sich nicht statistisch erklären, was sich sowohl im Chi-Quadrat-Wert von $\frac{\chi^2}{DoF} = 7,25 > 1$ als auch in der graphischen Darstellung zeigt.

3.2 Erdbeschleunigung

Für die Erdbeschleunigung lässt sich auf der Seite der PTB¹ ein Referenzwert von

$$g_r = (9,812\,65 \pm 0,000\,04) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

finden. Im Vergleich mit dem Referenzwert bietet der unkorrigierte Wert g_u erstaunlicherweise die beste Näherung. Sowohl der korrigierte Wert als auch der aus dem Fit gewonnene weichen über ihre Unsicherheit hinaus nach oben vom Referenzwert ab.

Bei näherer Betrachtung der Fehlerfortpflanzung wird ersichtlich, dass der Einfluss der Messung des Abstandes zwischen den beiden Schneiden den mit Abstand

¹<http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php>, Wert für Adlershof

größten Einfluss auf die Ergebnisse hat (der durch die Zeitungenauigkeit hinzugekommene Term verschwindet beim Runden, hat also eine um eine Größenordnung kleinere Auswirkung als der der Längenmessung).

Allerdings haben auch schon kleine Änderungen in der Periodendauer eher große Auswirkungen auf das eigentliche Ergebnis. Demzufolge wäre es sehr sinnvoll, die Messung der Periodendauer einige Male zu wiederholen, um zufällige Einflüsse oder sogar grobe Messfehler zu minimieren. Weiterhin wäre es auch möglich, ein Modell für die Abhängigkeit der Periodendauer von der Position der Masse M1 zu finden, wodurch dann viele Datenpunkte gefittet werden könnten und so die Schnittpunkte der beiden Kurven genauer bestimmbar wären bzw. die lineare Näherung nicht genutzt werden müsste.

Während der Suche nach möglichen Fehlerquellen wurde die Fallbeschleunigung mit leicht veränderten Messwerten errechnet: Sowohl eine um 0,0002 s vergrößerte Periodendauer im Reversionszustand als auch eine um 0,3 mm verringerte reduzierte Pendellänge sorgen für ein eher der Referenz entsprechendem Ergebnis von $(9,813 \pm 0,001) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Die Korrektur für den Auslenkungswinkel ist für ein mathematisches Pendel gerechtfertigt, wie im oben gezeigt wurde. Deswegen erscheint ihre Anwendung auch hier sinnvoll, zumal die Auswirkung auf das Resultat in der Größenordnung von $0,0005 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ liegt und damit die Abweichung des korrigierten Wertes nicht erklären kann.

Demzufolge

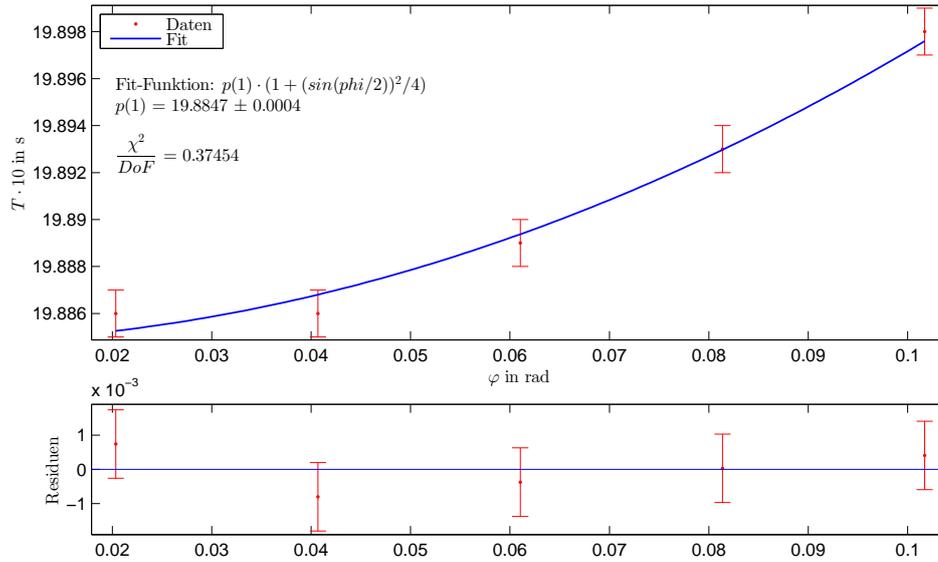


Abb. 2: Fit der Periodendauern in Abhängigkeit vom Auslenkungswinkel, wobei das Reversionspendel in einer mathematische Position ist; der Großteil der Masse ist weit von der Aufhängung entfernt

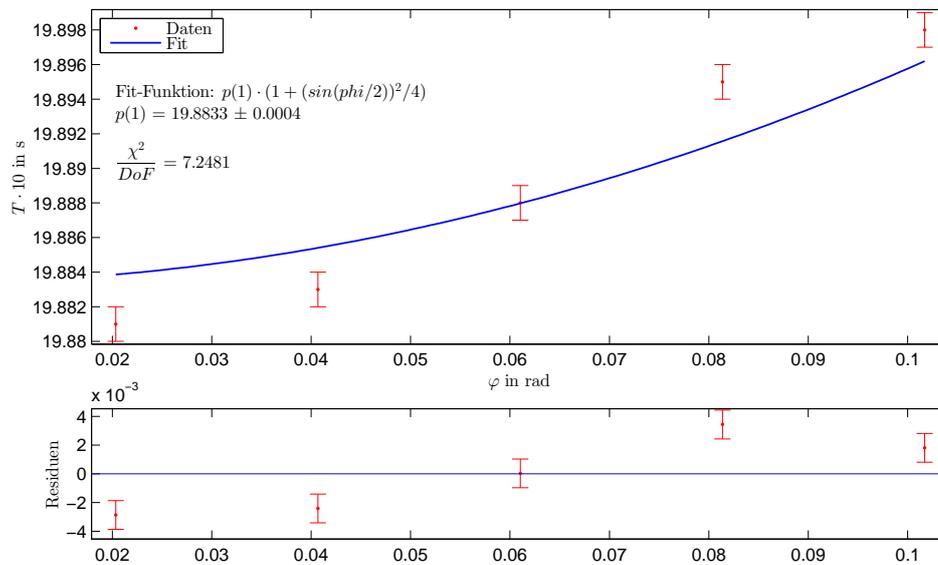


Abb. 3: Fit der Periodendauern in Abhängigkeit vom Auslenkungswinkel, wobei das Reversionspendel so aufgehängt ist, dass sich der Hauptteil der Masse in der Nähe der Aufhängung befindet