Protokoll Grundpraktikum I:
M6 - Innere Reibung in Flüssigkeiten

Sebastian Pfitzner

20. April 2013

Durchführung: Sebastian Pfitzner (553983), Anna Andrle (55)
Arbeitsplatz: Platz 2
Betreuer: Stefanie Winkler
Versuchsdatum: 17.04.2013

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbetrachtungen

Der nachfolgend beschriebene Versuch hat die Bestimmung der Viskosität von Rizinusöl zum Ziel.

Eine einfache Methode dazu ist die Reibungskraft zu ermitteln, die beispielsweise der Bewegung einer Kugel in der Flüssigkeit entgegenwirkt. Im Fall einer laminaren Strömung - die bei einer Reynoldszahl

$$Re = \frac{v \cdot r_K \cdot \rho_{Fl}}{\eta} \tag{1}$$

sehr viel kleiner als 1 auftritt - lässt sich die Reibungskraft durch die Stokes-Reibung beschreiben. Diese verhält sich direkt proportional zur dynamischen Viskosität η, was eine einfache Bestimmung derselben ermöglicht.

Die Reibungskraft wird im Experiment indirekt bestimmt: Da die Stokes-Reibung bei einem fallenden Körper nach einiger Zeit für ein Kräftegleichgewicht und damit auch eine gleichbleibende Geschwindigkeit sorgt, lässt sich aus einer Geschwindigkeitsmessung auch die Reibungskraft bestimmen. Allerdings muss dabei auch die Auftriebskraft des Körpers in der Flüssigkeit berücksichtigt werden - ebenso wie die Tatsache, dass die Reibung auch vom Durchmesser des Gefäßes abhängt, in dem sich die Flüssigkeit befindet. Der Grund hierfür ist, dass der sich bewegende Körper einzelne Flüssigkeitsschichten bzw. Lamellen in Bewegung versetzt. Diese sind durch intermolekulare Kräfte an benachbarte Schichten gebunden, die dann zu einem geringeren Ausmaß beschleunigt werden. Wenn nun aber eine Schicht auf die Gefäßwand trifft, entstehen wiederum Reibungskräfte zwischen *allen* bisher betrachteten Schichten sowie dem sich bewegenden Körper. Diese der Bewegungsrichtung entgegengesetzte Kraft muss bei endlichem Gefäßdurchmesser - bzw. im Vergleich zum Körper nicht sehr großem Durchmesser - als Korrekturterm beachtet werden.

Um die verwendeten Messungen und Berechnungen möglichst einfach zu halten und Fehlerquellen (wie z.B. rotierende Körper) zu minimieren, wurden Kugeln vier verschiedener Größen verwendet. Diese wurden in einen mit Rizinusöl gefüllten Glaszylinder fallen gelassen, in dem sie nach einigen Zentimetern Fallstrecke eine gleichbleibende Geschwindigkeit behielten. Aus der Dichte der Flüssigkeit ρ_{Fl}, der Dichte des Kugelmaterials ρ_{ρ_K}, dem Kugelradius r_K und der (gleichbleibenden) Kugelgeschwindigkeit v ergeben sich folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} F_G &= \frac{4}{3}\pi \cdot r_K^3 \cdot g \cdot \rho_K \\ F_A &= -\frac{4}{3}\pi \cdot r_K^3 \cdot g \cdot \rho_{Fl} \\ F_R &= -6\pi \cdot \eta \cdot r_K \cdot v \end{aligned}$$

woraus sich für den Fall einer gleichförmigen Bewegung $\Leftrightarrow F_G + F_A + F_R = 0$ folgende Bestimmungsgleichung für η ergibt, wenn die Annahme eines unendlich großen Zylinderradius berücksichtigt wird:

$$\eta = \frac{2}{9} \cdot r_K^2 \cdot g \cdot (\rho_K - \rho_{Fl}) \cdot \frac{t}{l} \tag{2}$$

Für einen endlichen Zylinderradius lautet die korrigierte Reibungskraft nach Ladenburg

$$F_R = -6\pi \cdot \eta \cdot r_K \cdot \frac{l}{t}\left(1 + 2{,}1\frac{r_K}{r_Z}\right)$$

woraus dann eine korrigierte dynamische Viskosität abgeleitet wird:

$$\eta_{korr} = \frac{2}{9} \cdot r_K^2 \cdot g \cdot \frac{(\rho_K - \rho_{Fl}) \cdot t}{\left(1 + 2{,}1 \cdot \frac{r_K}{r_Z}\right) \cdot l} \tag{3}$$

Aus der dynamischen Viskosität und der Dichte der Flüssigkeit lässt sich auch die kinematische Viskosität berechnen:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho_{Fl}} \tag{4}$$

2 Messwerte

Für jede Kugelgröße wurden zehn Messungen der Fallzeit und der Mittelwert gebildet. Hierbei war es wichtig, dass die Geschwindigkeit der Kugel im gemessenen Bereich konstant war, da sonst die Annahme eines Kräftegleichgewichts verletzt wäre. Darum wurden mit der Kugel größten Durchmessers drei Zeiten bei Strecken von 10 cm, 20 cm und 30 cm gemessen. Bei der Berechnung der Geschwindigkeit ergab sich bei einer Strecke von 30 cm eine Abweichung von den anderen Werten, weshalb alle weiteren Messungen bei $l = (20{,}0 \pm 0{,}3)$cm durchgeführt wurden.

Die Kugeln haben einen Durchmesser von $d_1 = (3{,}994 \pm 0{,}005)$mm, $d_2 = (3{,}000 \pm 0{,}005)$mm, $d_3 = (1{,}998 \pm 0{,}005)$mm und $d_4 = (1{,}000 \pm 0{,}005)$mm, die Dichte beträgt $\rho_{K1} = (7{,}73 \pm 0{,}03)\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, $\rho_{K2} = (7{,}83 \pm 0{,}05)\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, $\rho_{K3} = (7{,}73 \pm 0{,}07)\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ und $\rho_{K1} = (7{,}70 \pm 0{,}20)\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

#	t_1 in s	t_2 in s	t_3 in s	t_4 in s
1	3,16	5,59	12,66	48,66
2	3,44	5,72	12,78	47,97
3	3,25	5,66	12,53	48,25
4	3,32	5,82	12,68	48,68
5	3,32	5,63	12,82	48,53
6	3,44	5,72	12,22	48,32
7	3,44	5,75	12,44	48,00
8	3,41	5,68	12,50	48,22
9	3,35	5,78	12,56	48,22
10	3,37	5,41	12,41	47,97
$\bar{t}$	3,35	5,68	12,56	48,28
σ	0,092	0,116	0,182	0,268
Δt_z	0,029	0,037	0,057	0,085
Δt_s	0,012	0,013	0,016	0,034

Hieraus ergeben sich also folgende Messwerte (Unsicherheiten durch pythagoreische Addition der zufälligen und systematischen Messfehler gewonnen):

$$t_1 = (3{,}35 \pm 0{,}03)\mathrm{s} \qquad t_2 = (5{,}68 \pm 0{,}04)\mathrm{s}$$
$$t_3 = (12{,}56 \pm 0{,}06)\mathrm{s} \qquad t_4 = (48{,}28 \pm 0{,}09)\mathrm{s}$$

Der Innendurchmesser des Zylinders (bestimmt mit einer Schiebelehre) beträgt $d_z = (6{,}03 \pm 0{,}03)$mm, die mit einem Aräometer bestimmte Dichte des Rizinusöls $\rho_R = (0{,}95 \pm 0{,}02)\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

Für die Erdbeschleunigung wird von $g = (9{,}8128 \pm 0{,}0001)\frac{m}{s^2}$ (Quelle: PTB[1]) ausgegangen. In den nachfolgenden Berechnungen wird g aufgrund des im Vergleich sehr kleinen Unsicherheiten als fehlerfrei angenommen.

3 Auswertung

Aus den gemessenen Größen ergeben sich durch Einsetzen in (2) die unkorrigierten dynamischen Viskositäten. Deren Unsicherheit lässt sich durch

$$\begin{aligned}\Delta\eta = \Bigg[&\left(\frac{2}{9}2r_K(\rho_K-\rho_R)\frac{t}{l}\right)^2 \cdot \Delta r_K^2 + \left(\frac{2}{9}r_K^2\frac{(\rho_K-\rho_R)}{l}\right)^2 \cdot \Delta t^2 + \\ &\left(\frac{2}{9}r_K^2(\rho_K-\rho_R)\frac{t}{l^2}\right)^2 \cdot \Delta l^2 + \left(\frac{2}{9}r_K^2\frac{t}{l}\right)^2 \cdot (\Delta\rho_K^2 + \Delta\rho_R^2)\Bigg]^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{5}$$

bestimmen. Die vollständigen Ergebnisse lauten also:

$$\eta_1 = (987 \pm 5)\text{mPa s} \qquad \eta_2 = (958 \pm 7)\text{mPa s}$$
$$\eta_3 = (927 \pm 10)\text{mPa s} \qquad \eta_4 = (888 \pm 18)\text{mPa s}$$

Die korrigierten Viskositäten lassen sich mit (3) berechnen, die Unsicherheiten ergeben sich ähnlich wie in (5) durch

$$\begin{aligned}\Delta\eta_{korr} = \Bigg[&\left(\frac{2}{9}(\rho_K-\rho_R)\frac{t}{l}\cdot\frac{r_K\cdot r_Z\cdot(2{,}1r_K+2r_Z)}{(2{,}1r_K+r_Z)^2}\right)^2 \cdot \Delta r_K^2 + \\ &\left(\frac{2}{9}r_K^2\frac{(\rho_K-\rho_R)}{l}\cdot\frac{1}{1+2{,}1\frac{r_K}{r_Z}}\right)^2 \cdot \Delta t^2 + \\ &\left(-\frac{2}{9}r_K^2(\rho_K-\rho_R)\frac{t}{l^2}\cdot\frac{1}{1+2{,}1\frac{r_K}{r_Z}}\right)^2 \cdot \Delta l^2 + \\ &\left(\frac{2}{9}r_K^2\frac{t}{l}\cdot\frac{1}{1+2{,}1\frac{r_K}{r_Z}}\right)^2 \cdot (\Delta\rho_K^2+\Delta\rho_R^2) + \\ &\left(\frac{2}{9}r_K^2(\rho_K-\rho_R)\frac{t}{l}\cdot\frac{2{,}1\cdot r_K}{\left(1+2{,}1\frac{r_K}{r_Z}\right)^2\cdot r_Z^2}\right)^2 \cdot \Delta r_Z^2\Bigg]^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{6}$$

[1] http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php - Wert für Berlin

also folgenden nach Ladenburg korrigierten Ergebnisse

$$\eta_{k1} = (867 \pm 5)\text{mPa s} \qquad \eta_{k2} = (867 \pm 6)\text{mPa s}$$
$$\eta_{k3} = (867 \pm 9)\text{mPa s} \qquad \eta_{k4} = (858 \pm 18)\text{mPa s}$$

Im Unterschied zu den nicht korrigierten Werten überlappen sich hier die Unsicherheiten, was die Bildung eines gewichteten Mittels erlaubt:

$$\eta_k = (867 \pm 3)\text{mPa s}$$

Was bei diesem Ergebnis zu beachten ist: Diese Viskosität wurde nur für eine Temperatur von $T = 22{,}5\,°\text{C}$ bestimmt und für andere Temperaturen aufgrund der starken Temperaturabhängigkeit ungenau bis falsch.

Die Messungen mit der vierten Kugel fanden bei einer 0,3 K höheren Temperatur statt, was eine mögliche Erklärung für die nach unten hin abweichende Viskosität bietet.

Aus η_k und der Dichte lässt sich nach (4) die kinematische Viskosität berechnen:

$$\nu_k = (912 \pm 20) \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Weiterhin muss geklärt werden, ob die oben genannte Bedingung $Re << 1$ für alle Kugeln zutrifft. Die nach (1) gebildeten Reynolds-Zahlen der vier Kugeln

$$Re_1 = 0{,}130 \qquad Re_2 = 0{,}058$$
$$Re_3 = 0{,}012 \qquad Re_4 = 0{,}002$$

sind alle um mindestens eine Größenordnung kleiner als 1, so dass die Annahme einer laminaren Strömung sinnvoll erscheint.