Protokoll Grundpraktikum I: M5 - Oberflächenspannung

Sebastian Pfitzner

28. April 2013

Durchführung: Sebastian Pfitzner (553983), Anna Andrle (550727)
Arbeitsplatz: !!Platz!!
Betreuer: Stefan Weidemann
Versuchsdatum: 24.04.2013

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbetrachtungen

Ziel diese Versuchs ist die Bestimmung der Oberflächenspannung σ von destilliertem Wasser.

Innerhalb einer Flüssigkeit wirken intermolekulare Kräfte, die sich im Normalfall aufheben, an Grenzschichten zu anderen Medien jedoch nicht. Dort entsteht eine ins innere gerichtete Kraft, die den sogenannten Kohäsionsdruck hervorruft. Demzufolge muss Arbeit verrichtet werden, um ein Molekül aus dem Innern der Flüssigkeit an seine Oberfläche zu transportieren, wo sie demnach eine höhere potentielle Energie besitzen. Im Gleichgewichtszustand ist diese Energie extremal und kann - da sich ein instabiles Gleichgewicht nur schwer beobachten lässt - als minimal angenommen werden. Das ist auch der Grund für das Bestreben von Flüssigkeiten, ihre Oberfläche zu minimieren, denn diese ist proportional zur Oberflächenenergie.

Für die Oberflächenspannung gilt $\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A}$. Daraus kann für eine beliebig geformte Linie der Länge l, die um eine Strecke h senkrecht zur Oberfläche verschoben wird und eine dem entgegen gerichtete Kraft F_t, die Folge der Oberflächenspannung ist, folgende Beziehung abgeleitet werden:

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F_t \cdot h}{l \cdot h} = \frac{F_t}{l} \tag{1}$$

Für die Messung der Oberflächenspannung muss also nur noch die maximal mögliche Kraft F_t bestimmt werden, die die Flüssigkeit hervorrufen kann.

2 Messwerte und Auswertung

2.1 Bügelmethode

Bei dieser Methode wird ein Drahtbügel der Länge l in die Flüssigkeit eingetaucht und mit Hilfe einer Balkenwaage die Kraft gemessen, bei der die durch den Bügel herausgezogenen Lamelle abreißt.

An der Balkenwwage ist auf der einen Seite der in die Flüssigkeit getauchter Bügel und auf der anderen Seite eine Feder und eine Mikrometerschraube befestigt. Mit letzterer lässt sich die Waage in die Nullstellung zurückbringen und die dafür notwendige Verschiebung bestimmen. Zunächst wird eine Kalibrationskurve aufgenommen, bei der die Differenz zwischen der notwendigen Auslenkung bei verschiedenen Kräften und der Nullposition ohne zusätzliche Kraft bestimmt wurde. Daraus lässt sich durch Interpolation nun jede beliebige Kraft bestimmen, für die die Feder noch im linearen Bereich ist und die die Messanordnung zulässt.

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
	4,37	5,45	6,35	7,35	8,35	9,30	10,31	11,31	12,35	13,33
	4,30	5,32	6,32	7,34	8,35	9,35	10,32	11,35	12,31	13,32
mean	4,34	5,39	6,34	7,35	8,35	9,33	10,32	11,33	12,33	13,33
diff	0,00	1,05	2,00	3,01	4,02	4,99	5,98	6,99	7,99	8,99

Tab. 1: Messwerte zur Kalibrierung samt Mittelwert und Differenz (alle Größen in mm)

Der an der Waage angebrachte Bügel befindet sich in einer wassergefüllten Petrischale, die abgesenkt wird. Dabei wird die Waage in der Nullposition gehalten. Wenn nun die vom Bügel herausgezogenen Lamelle abreißt, dann lässt sich aus der Stellung der Mikrometerschraube die von der Oberflächenspannung hervorgerufene Kraft bestimmen. Aus (1) folgt (mit einem Faktor 2, da zwei Oberflächen vorliegen):

$$F_t = 2 \cdot l \cdot \sigma \tag{2}$$

Durch eine lineare Regression der Messwerte, für die eine Unsicherheit von 0,03 mm geschätzt wird, lässt sich folgendes Diagramm erstellen. Aus der gefit-

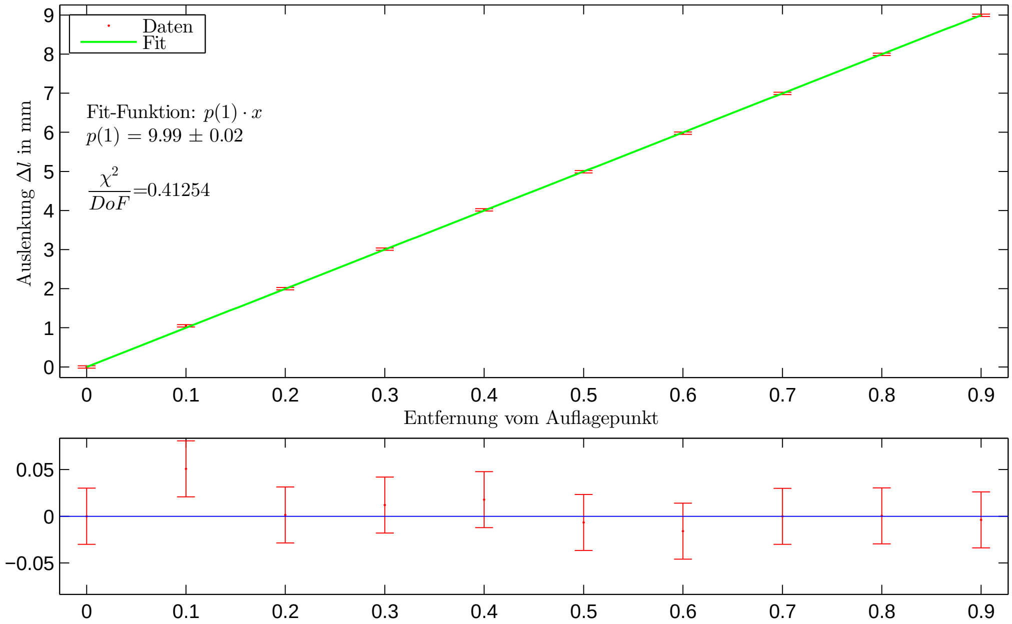

Abb. 1: linearer Fit der Differenzen der Stellungen der Mikrometerschraube

teten Funktion lässt sich der Vorfaktor der Kraft bestimmen, d.h. $F = x \cdot m \cdot g$, wobei $m = (1{,}300 \pm 0{,}002) \cdot 10^{-3}$kg und $g = (9{,}8128 \pm 0{,}0001)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ (Quelle: PTB[1])- aufgrund der geringeren Größenordnung der Unsicherheit der Gravitationsbeschleunigung wird diese im Folgenden als fehlerfrei angenommen. x ist dabei einheitenlos und hängt von Δa und dem Fitparamter p ab:

$$F_t = \frac{\Delta a}{p} \cdot m \cdot g \tag{3}$$

#	1	2	3	4	5	6	7	8	mean
a_0	4,3	4,33	4,34	4,33	4,31	4,31	4,3	4,27	
a_{end}	10,09	10,2	10,23	10,19	10,15	9,99	10,12	10,15	
Δa	5,79	5,87	5,89	5,86	5,84	5,68	5,82	5,88	5,83

Tab. 2: Ausgangsposition a_0 und Stellung a_{end} der Messschraube, bei der die Lamelle abreißt, sowie deren Differenz und der Mittelwert (alle Werte in mm)

[1] http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php - Wert für Berlin

Das vollständige Ergebnis für Δa lautet bei einer zufälligen Messabweichung von $\Delta(\Delta a)_{zuf} = \frac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}03\,\text{mm}$ und einer systematischen Ungenauigkeit der Messschraube von $\Delta(\Delta a)_{sys} = 0{,}005\text{mm}$ sowie einer Ableseungenauigkeit bei der Bestimmung der Nullposition der Waage von $\Delta(\Delta a)_{abl} = 0{,}05\,\text{mm}$:

$$\Delta a = (5{,}83 \pm 0,09)\text{mm}$$

Aus (2) und (3) lässt sich eine Bestimmungsgleichung für die Oberflächenspannung finden, wobei $l = (0{,}0503 \pm 0{,}001)\text{m}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{F_t}{2 \cdot l} = \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \frac{\Delta a}{p} \cdot m \cdot g \\
\sigma &= \frac{1}{2(0{,}0503 \pm 0{,}001)\text{m}} \cdot \frac{(5{,}83 \pm 0{,}09)\text{mm}}{(9{,}99 \pm 0{,}02)\text{mm}} \cdot (1{,}300 \pm 0{,}002) \cdot 10^{-3}\text{kg} \cdot 9{,}8128\frac{\text{m}}{\text{s}^2}
\end{aligned}$$

Für die Unsicherheit Oberflächenspannung gilt nach den Regeln der Fehlerfortpflanzung

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma = \Bigg[&\left(-\frac{\Delta a \cdot m \cdot g}{2 \cdot l^2 \cdot p}\right)^2 \cdot \Delta l^2 + \left(\frac{m \cdot g}{2 \cdot l \cdot p}\right)^2 \cdot \Delta(\Delta a)^2 + \\
&\left(-\frac{\Delta a \cdot m \cdot g}{2 \cdot l \cdot p^2}\right)^2 \cdot \Delta p^2 + \left(\frac{\Delta a \cdot g}{2 \cdot l \cdot p}\right)^2 \cdot \Delta m^2 \Bigg]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

woraus folgendes vollständiges Ergebnis resultiert

$$\sigma = (74{,}0 \pm 1{,}2)\frac{\text{mN}}{\text{m}} \tag{4}$$

2.2 Kapillarmethode

Bei dieser Methode wird eine Kapillare in Wasser eingetaucht. Aufgrund der Oberflächenspannung steigt das Wasser um eine Höhe h nach oben. Die Kraft lässt sich durch (1) bestimmen, wobei $l = u = 2\pi r$ (r ist der Innenradius der Kapillare) gilt. Die Flüssigkeit befindet sich in einem stabilen Gleichgewicht, also muss $|F_G| = |F_\sigma|$ mit $F_G = m \cdot g = \rho \cdot V \;\, g = \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot g$ gelten. Als Bestimmungsgleichung für die Oberflächenspannung ergibt sich also mit $d = 2r$

$$\sigma = \frac{h}{4} \cdot \rho \cdot d \cdot g \tag{5}$$

Die Dichte des Wassers in Abhängigkeit der Temperatur beträgt $\rho_T = 21{,}5\,^\circ\text{C} = (997{,}84 \pm 0{,}1)\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

#	d_1	h_1	d_2	h_2	d_3	h_3	d_4	h_4
1	53,5	24,5	22,0	61,0	18,0	70,0	30,0	45,5
2	53,0	25,0	22,0	61,0	19,0	70,5	30,0	43,0
3	54,0	24,5	22,0	61,5	19,0	71,0	30,0	44,0
4	54,0	24,5	22,0	61,5	19,0	70,5	30,5	45,0
5	53,0	24,0	22,0	61,0	18,5	71,0	30,5	44,0
6	53,0	24,5	21,0	60,5	18,0	70,0	30,5	43,5
mean (mm)	1,14	24,5	0,47	61,1	0,40	72,2	0,64	44,2
STD (mm)	0,010	0,32	0,008	0,38	0,010	0,45	0,006	0,93

Tab. 3: Messwerte und Mittelwerte für die Kapillarendurchmesser d_i (in Skalenteilen, $1\,\mathrm{Skt} = 0{,}0213\,\mathrm{mm}$, soweit nicht anders angegeben) und die Steighöhen h_i in mm

Es ergeben sich folgende Messwerte für die vier Kapillaren:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= (1{,}14 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-3}\mathrm{m} & h_1 &= (24{,}5 \pm 1{,}1) \cdot 10^{-3}\mathrm{m} \\
d_2 &= (0{,}47 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-3}\mathrm{m} & h_2 &= (61{,}1 \pm 1{,}2) \cdot 10^{-3}\mathrm{m} \\
d_3 &= (0{,}40 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-3}\mathrm{m} & h_3 &= (72{,}2 \pm 1{,}2) \cdot 10^{-3}\mathrm{m} \\
d_4 &= (0{,}64 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-3}\mathrm{m} & h_4 &= (44{,}2 \pm 1{,}4) \cdot 10^{-3}\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Dabei setzt sich die Unsicherheit des Durchmessers aus der statistischen Abweichung und einem systematischen Fehler von einem halben Skalenteil zusammen, während für die Gesamtunsicherheit der Steighöhe zum statistischen Fehler noch eine Ableseungenauigkeit von einem Millimeter hinzukommt.

Für die Unsicherheit der Oberflächenspannung gilt

$$\Delta\sigma = \sqrt{\left(\frac{1}{4} \cdot \rho \cdot d \cdot g\right)^2 \cdot \Delta h^2 + \left(\frac{h}{4} \cdot d \cdot g\right)^2 \cdot \Delta\rho^2 + \left(\frac{h}{4} \cdot \rho \cdot g\right)^2 \cdot \Delta d^2} \tag{6}$$

Aus den mit (5) und (6) gewonnen Werten lässt sich ein gewichteter Mittelwert bilden, da sich die Unsicherheiten überlappen:

$$\sigma = (69{,}0 \pm 1{,}4)\frac{\mathrm{mN}}{\mathrm{m}}$$

3 Vergleich der Ergebnisse

Die mit den beiden oben aufgeführten Methoden gewonnenen Ergebnisse entsprechen beide nicht - innerhalb ihrer Unsicherheit - dem Referenzwert von $\sigma_r = 72{,}8\frac{\mathrm{mN}}{\mathrm{m}}$. Dabei ist der durch die Bügelmethode gewonnene Wert noch etwas besser als der durch die Kapillarmethode gewonnene. Vermutlich aufgrund eines nicht berücksichtigten systematischen Fehlers bei beiden Versuchen lässt sich auch kein gewichteter Mittelwert bilden, da die Unsicherheiten nicht überlappen. Auch wenn es strenggenommen keine genauen Aussagen erlaubt, wurde hier der Mittelwert der beiden Oberflächenspannungen berechnet: $\bar{\sigma} = 71{,}5\frac{\mathrm{mN}}{\mathrm{m}}$. Dieser stimmt erheblich besser mit dem Referenzwert überein als die Einzelwerte.

Mögliche unberücksichtigte Fehlerquellen sind bei der Bügelmethode hauptsächlich menschlicher Natur - also zu schnelles Vorgehen, was zu ungenaueren Ergebnissen führt, da die gemessene Kraft nicht mehr fein genug abgestuft ist, um die von den Berechnungen suggerierten Unsicherheiten zu gewährleisten. Bei der Kapillarmethode scheint ebenfalls ein systematischer Fehler aufzutreten, der durch den nicht berücksichtigten Luftdruck zustande kommen könnte.