

Protokoll Grundpraktikum I: M3 - Elastizität und Torsion

Sebastian Pfitzner

20. Mai 2013

Durchführung: Sebastian Pfitzner (553983), Anna Andrlé (550727)

Arbeitsplatz: Platz 4

Betreuer: Jacob Michael Budau

Versuchsdatum: 15.05.2013

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbetrachtungen	1
2	Messwerte und Auswertung	2
2.1	Längenänderung des Drahtes	2
2.2	Periodendauer der Drehschwingung	3
3	Vergleich der Ergebnisse	5

1 Vorbetrachtungen

Ziel dieses Versuchs ist die Bestimmung des Elastizitäts-, Kompressions- und Torsionsmoduls von Messing sowie dessen Poisson-Zahl.

Zur Bestimmung des ersteren wird ein Messingdraht schrittweise mit Massestücken belastet und die durch die Gravitationskräfte hervorgerufenen Längenänderungen gemessen. Für den Elastizitätsmodul gilt:

$$E = \frac{l}{\Delta l} \frac{F}{A} \quad (1)$$

wobei l die Länge des Drahtes, Δl die vom Massestück hervorgerufene Längenänderungen, F die Gewichtskraft und A die Querschnittsfläche des Drahtes ist.

Der Torsionsmodul wird aus der Untersuchung der Periodendauer der durch den Draht durchgeführten Drehschwingung ermittelt. Es gilt:

$$G = \frac{4\pi l}{R^4} \cdot \frac{mr^2}{T_z^2 - T_o^2} \quad (2)$$

mit l als Drahtlänge, R als Radius des Drahtes, m und r als Kenngrößen des zusätzlich angehängten Massestücks, bei dessen Vorhandensein die Periodendauer T_z und ohne die T_o gemessen wird.

2 Messwerte und Auswertung

2.1 Längenänderung des Drahtes

Der Mesingdraht hat eine Länge von $l = (2195 \pm 5)$ mm und einen Durchmesser von $d = (0,30 \pm 0,01)$ mm. Für die Unsicherheit der in Tabelle 1 dargestellten Positionen der der Messschraube, für die der Balken sich im Gleichgewicht befindet, wird $\Delta s = 0,01$ mm abgeschätzt. Für die Fehler der Längendifferenz gilt dann nach pythagoreischer Addition der Fehler $\Delta_{\Delta l, i} = 0,014$ mm. Für beide Messreihen wird

Δm in g	0	50	100	150	200	250	300	350	400
s_1 in mm	6,16	6,325	6,48	6,65	6,79	6,95	7,10	7,27	7,41
s_2 in mm	6,17	6,34	6,5	6,66	6,81	6,97	7,12	7,28	7,43
Δl_1 in mm	0	0,165	0,32	0,49	0,63	0,79	0,94	1,11	1,25
Δl_2 in mm	0	0,17	0,33	0,49	0,64	0,80	0,95	1,11	1,26
Δm in g		450	500	550	600	650	700	750	800
s_1 in mm		7,58	7,71	7,87	8,03	8,18	8,32	8,48	8,63
s_2 in mm		7,58	7,73	7,87	8,04	8,17	8,36	8,48	8,63
Δl_1 in mm		1,42	1,55	1,71	1,87	2,02	2,16	2,32	2,47
Δl_2 in mm		1,41	1,56	1,70	1,87	2,00	2,19	2,31	2,46

Tab. 1: zwei Messreihen zur Position der Messschraube s in Abhängigkeit von der Massenänderung Δm sowie die Längenänderung des Drahtes Δl

ein linearer Fit angefertigt (Abbildungen 1 und 2); aus den ermittelten Parametern wird ein gewichtetes Mittel¹ gebildet:

$$\bar{p} = (3,108 \pm 0,005) \cdot 10^{-3} \text{mm/g}$$

¹siehe blaues Skript, Gleichungen (55) und (56)

Aus Gleichung (1) lässt sich mit $F = m \cdot g$ folgende Bestimmungsgleichung für den Elastizitätsmodul in Abhängigkeit vom Fitparameter p und den Kenngrößen des Drahtes sowie der als fehlerfrei angenommenen Erdbeschleunigung ableiten

$$\begin{aligned}\Delta l &= p \cdot m \\ p &= \frac{l}{E \cdot A} \cdot g \\ E &= \frac{l}{p \cdot \frac{\pi}{4} d^2} \cdot g\end{aligned}$$

Die Unsicherheit des Elastizitätsmoduls berechnet sich nach den Gesetzen der gaußschen Fehlerfortpflanzung wie folgt:

$$\Delta E = \sqrt{\left(\frac{g}{p \cdot \frac{\pi}{4} d^2}\right)^2 \cdot \Delta l^2 + \left(-\frac{l \cdot g}{p^2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2}\right)^2 \cdot \Delta p^2 + \left(-\frac{2 \cdot l \cdot g}{p \cdot \frac{\pi}{4} d^3}\right)^2 \cdot \Delta d^2}$$

Es ergibt sich ein vollständiges Ergebnis von

$$E = (98 \pm 7) \text{GPa}$$

2.2 Periodendauer der Drehschwingung

Für die Bestimmung des Torsionsmoduls werden jeweils sechs Messwerte bei einer Belastung des Drahtes mit einem 50-Gramm-Massenstück und bei einer zusätzlichen Belastung mit einer Zusatzscheibe: $m_z = (129,821 \pm 0,001) \text{g}$ und $r_z = (25,0 \pm 0,1) \text{mm}$.

bei 30 Schwingungen							Kontrolle
i	1	2	3	4	5	6	7
$t_{o,i}$ in s	187,00	186,88	186,64	186,72	186,66	183,18	186,42
bei 10 Schwingungen, mit Zusatzgewicht							
i	1	2	3	4	5	6	
$t_{z,i}$ in s	125,82	125,87	125,97	125,97	125,87	125,85	

Tab. 2: benötigte Zeit für 30 bzw. zehn Drehschwingungen sowie ein Kontrollwert bei starker Pendelbewegung

Der bei starker Quer- und Längsschwingung zusätzlich zur Drehschwingung aufgenommene Kontrollwert zeigt, dass Pendelbewegungen und Schwingungen des Drahtes keinen oder einen vernachlässigbar kleinen Einfluss auf die Periodendauer der Drehschwingung haben.

Der sechste Messwert der ersten Messreihe weicht offensichtlich stark von den anderen ab; mit hoher Wahrscheinlichkeit wurde die Messungen eine halbe Periodendauer zu spät begonnen. Deswegen wird dieser Wert korrigiert und im Folgenden als $t_{o,6} = 186,18 \text{ s} + \frac{t_1 + \dots + t_5 + t_7}{6 \cdot 30 \cdot 2} = 186,29 \text{ s}$ angesehen. Es ergibt sich daraus für die Mittelwerte und Standardabweichungen

$$\begin{aligned} \bar{t}_o &= 186,66 \text{ s} & \sigma_{t,o} &= 0,25 \text{ s} \\ \bar{t}_z &= 125,89 \text{ s} & \sigma_{t,z} &= 0,06 \text{ s} \end{aligned}$$

Die Unsicherheit der Mittelwerte setzt sich aus dem Rundungsfehler der Stoppuhr $\pm 0,01 \text{ s}$, dem Konfidenzintervall $\pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ und dem systematischen Fehler der Stoppuhr $\pm t \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ zusammen, woraus sich folgende vollständige Ergebnisse für die Zeiten und die Periodendauern T ergeben:

$$\begin{aligned} t_o &= (186,66 \pm 0,20) \text{ s} & T_o &= (6,222 \pm 0,008) \text{ s} \\ t_z &= (125,89 \pm 0,10) \text{ s} & T_z &= (12,589 \pm 0,006) \text{ s} \end{aligned}$$

Aus Gleichung (2) ergibt sich die Unsicherheit des Torsionsmoduls

$$\Delta G = \left[\frac{16 \cdot m^2 \pi^2 r^4 \cdot \Delta l^2}{R^8 (-T_o^2 + T_z^2)^2} + \frac{16 \cdot l^2 \pi^2 r^4 \cdot \Delta m^2}{R^8 (-T_o^2 + T_z^2)^2} + \frac{64 \cdot l^2 m^2 \pi^2 r^2 \cdot \Delta r^2}{R^8 (-T_o^2 + T_z^2)^2} \right. \\ \left. + \frac{256 \cdot l^2 m^2 \pi^2 r^4 \cdot \Delta R^2}{R^{10} (-T_o^2 + T_z^2)^2} + \frac{64 \cdot l^2 m^2 \pi^2 r^4 T_o^2 \cdot \Delta T_o^2}{R^8 (-T_o^2 + T_z^2)^4} + \frac{64 \cdot l^2 m^2 \pi^2 r^4 T_z^2 \cdot \Delta T_z^2}{R^8 (-T_o^2 + T_z^2)^4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

sodass das vollständige Ergebnis wie folgt lautet:

$$G = (37 \pm 5) \text{ GPa}$$

Für die Poisson-Zahl und den Kompressionsmodul gilt

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{E}{2 \cdot G} - 1 \\ K &= \frac{E}{3 \cdot (1 - 2\mu)} \end{aligned}$$

Die Unsicherheiten lassen sich nicht berechnen, da alle Größen voneinander abhängig sind, die Kovarianz allerdings unbekannt ist. Es ergeben sich also folgende Ergebnisse:

$$\mu = 0,32 \qquad K = 95,5 \text{ GPa}$$

3 Vergleich der Ergebnisse

Für Elastizitätsmodul und Poissonzahl lassen sich Vergleichswerte im Kohlrausch² finden. Diese stimmen gut mit den im Experiment gewonnenen Ergebnissen überein: $E_{ref} = 105 \text{ GPa} \approx E_E = (98 \pm 7) \text{ GPa}$ und $\mu_{ref} = 0,35 \approx \mu_E = 0,32$. Auch die auf der Website des Kupferinstituts³ gefundenen Referenzwerte für den Elastizitätsmodul $E_{ref} = (84...127) \text{ GPa}$ sowie den Torsionsmodul $G_{ref} = (31...48) \text{ GPa}$ stimmen mit den hier gewonnenen Ergebnissen überein.

Sowohl die Unsicherheit des Elastizitätsmoduls als auch die des Torsionsmoduls wird von der Unsicherheit des Durchmessers des Drahtes dominiert. Dieser Term ist in beiden Fällen mindestens drei Größenordnungen größer als alle anderen. Hier ließen sich die Werte also besonders stark verbessern, wenn entweder ein dickerer Draht - der dann möglicherweise auch genauer vermessen werden kann - zusammen mit schwereren Massen verwendet würde.

Die Zeitmessung zur Bestimmung der Periodendauer der Drehschwingung ließe sich durch den Einsatz einer Lichtschranke verbessern, allerdings sind die hier entstehenden Unsicherheiten im Gegensatz zu denen des Drahtes vernachlässigbar.

²http://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/publikationen/buecher/Kohlrausch/Tabellen/Kohlrausch_3_Tabellen_und_Diagramme_Mechanik.pdf, Seite 300

³http://www.kupferinstitut.de/front_frame/pdf/i05_0307.pdf

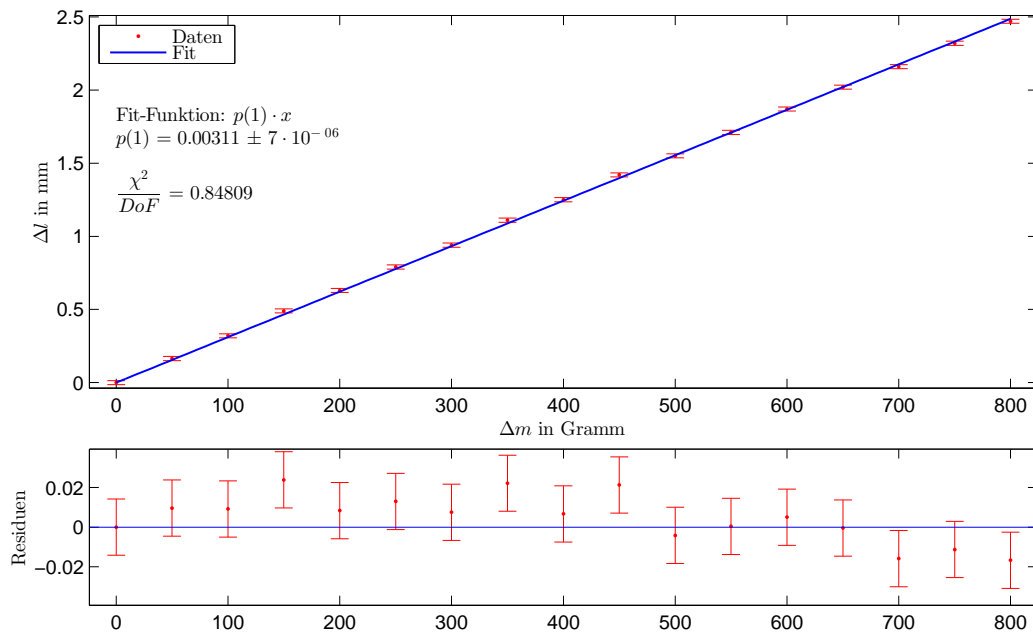


Abb. 1: linearer Fit des ersten Datensatzes; $p_1 = (3,108 \pm 0,007) \cdot 10^{-3} \text{mm/g}$

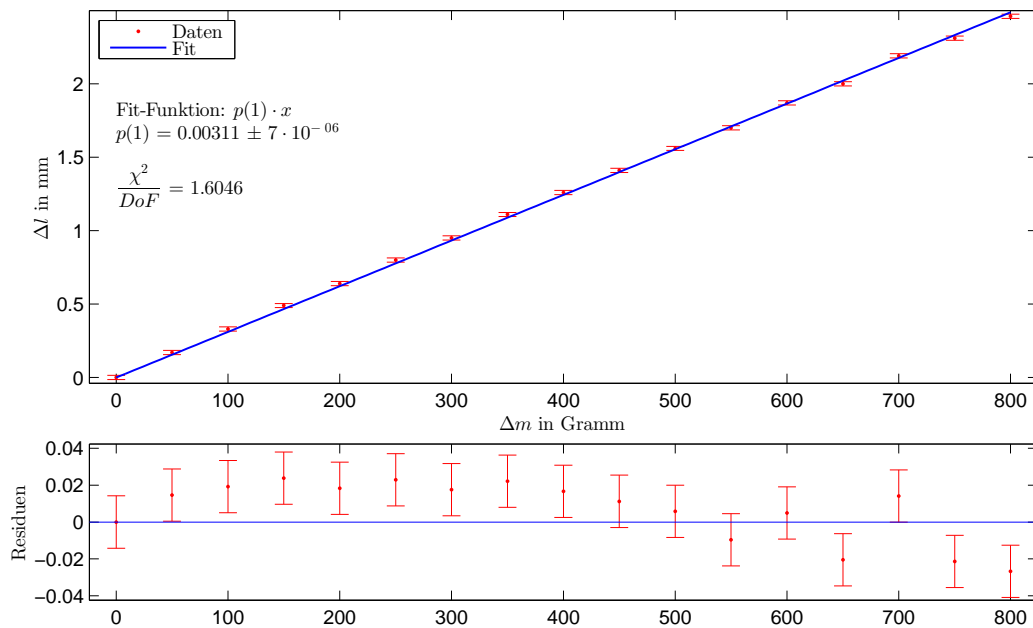


Abb. 2: linearer Fit des zweiten Datensatzes; $p_2 = (3,108 \pm 0,007) \cdot 10^{-3} \text{mm/g}$