

# Protokoll Grundpraktikum I: M10 Gyroskop

Sebastian Pfitzner

2. Juli 2013

**Durchführung:** Sebastian Pfitzner (553983), Anna Andrle (550727)

**Arbeitsplatz:** Platz 4

**Betreuer:** David Altmann

**Versuchsdatum:** 26.06.2013

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Abstract</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Messwerte und Auswertung</b>	<b>2</b>
2.1	$J_x$ : Präzession bei variablem Drehmoment und fester Drehzahl . . .	2
2.2	$J_x$ : Präzession bei festem Drehmoment und variabler Drehzahl . . .	4
2.3	$J_x$ : Rechnerische Bestimmung . . . . .	6
2.4	$J_s$ : Nutation bei variabler Drehzahl . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Vergleich der Ergebnisse</b>	<b>8</b>

## 1 Abstract

Ziel dieses Versuchs ist die Bestimmung der Trägheitsmomente der Versuchsanordnung bezüglich zweier verschiedener Rotationsachsen. Dazu wird das Gyroskop einerseits vermessen und daraus die Trägheitsmomente rechnerisch ermittelt. Andererseits wird die Präzessions- und die Nutationsperiodendauer der Versuchsanordnung gemessen und aus diesen ebenfalls die Trägheitsmomente errechnet.

Die aus der Periodendauer gewonnenen Ergebnisse stimmen mit denen aus der geometrischen Betrachtung im Rahmen ihrer Unsicherheiten überein.

## 2 Messwerte und Auswertung

### 2.1 $J_x$ : Präzession bei variablem Drehmoment und fester Drehzahl

Für diese Messung wird das Gyroskop bei konstanter Kreiseldrehzahl mit dem verschiebbaren Massenstück in eine Gleichgewichtsposition gebracht, was sich durch das Verschwinden jeglicher Drehungen um die Aufhängung bemerkbar macht, denn im Gleichgewicht gibt es kein Drehmoment mehr, das eine Präzession bewirken könnte. Daraufhin werden zehn Massenstücke mit Massen zwischen 50 g und 500 g nacheinander an das Gyroskop angebracht. Das dadurch entstehende Drehmoment sorgt nun für eine Präzessionsbewegung, deren Periodendauer sich messen lässt.

Der Abstand zwischen Aufhängung und Mittelpunkt des Zusatzgewichts mit einer Breite von 25 mm beträgt in allen Fällen  $r = 182,1 \text{ mm} - \frac{25 \text{ mm}}{2} = 169,6 \text{ mm}$ . Mit einer Gravitationsbeschleunigung<sup>1</sup> von  $g = (9,81265 \pm 0,00004) \text{ m s}^{-2}$  ergibt sich daraus das Drehmoment, wenn davon ausgegangen wird, dass  $\vec{F}_g$  und  $\vec{r}$  senkrecht aufeinander stehen - was zumindest zu Beginn der Messung gegeben ist. Das

$m$ in g	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
$n$ in Hz	11,2	10,8	10,8	10,8	10,8	10,8	10,7	10,8	10,9	11
$M$ in Nm	83,21	166,42	249,63	332,85	416,06	499,27	582,48	665,69	748,90	832,11
$T$ in s	13,68	6,78	4,47	3,53	2,85					
$2T$ in s					5,59	4,66	4,18	3,66	3,44	3,09
$T$ in s	13,68	6,78	4,47	3,53	2,80	2,33	2,09	1,83	1,72	1,55

**Tab. 1:** Messwerte für die einfache bzw. doppelte Periodendauer der Präzessionsbewegung bei verschiedenen Drehmomenten

Trägheitsmoment  $J_x$  lässt sich mit der folgenden im Skript hergeleiteten Formel aus der Periodendauer errechnen

$$J_x = \frac{M \cdot T_P}{4 \cdot \pi^2 \cdot n} \quad (1)$$

wobei  $M$  das durch das zusätzliche Massenstück hervorgerufene Drehmoment,  $T_P$  die gemessene Präzessionsperiodendauer und  $n$  die Kreiseldrehzahl ist.

Für die zufälligen Fehler gilt die gaußsche Fehlerfortpflanzung, die sich in diesem Fall wie folgt ergibt:

$$\Delta J_{x,zuf} = \sqrt{\left(\frac{T_P \cdot \Delta M_{zuf}}{4 \cdot \pi^2 \cdot n}\right)^2 + \left(\frac{M \cdot \Delta T_{P,zuf}}{4 \cdot \pi^2 \cdot n}\right)^2 + \left(-\frac{M \cdot T_P \cdot \Delta n_{zuf}}{4 \cdot \pi^2 \cdot n^2}\right)^2} \quad (2)$$

<sup>1</sup><http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php>, Wert für Adlershof

Die systematischen Fehler des Trägheitsmomentes können mit einer Größtfehlerabschätzung wie folgt bestimmt werden:

$$\Delta J_{x,sys}^+ = \frac{(M + \Delta M_{sys}) \cdot (T_P + \Delta T_{P,sys})}{4 \cdot \pi^2 \cdot (n - \Delta n_{sys})} - J_x \quad (3)$$

$$\Delta J_{x,sys}^- = \frac{(M - \Delta M_{sys}) \cdot (T_P - \Delta T_{P,sys})}{4 \cdot \pi^2 \cdot (n + \Delta n_{sys})} - J_x \quad (4)$$

Die Unsicherheit der Zeitmessung setzt sich aus einem zufälligen Anteil aus der Streuung der Reaktionszeit und einem systematischen Anteil aus der Unsicherheit der Stoppuhr zusammen. Erstere wurde bestimmt, indem die Standardabweichung einer 16-mal wiederholten Zeitmessung betrachtet wurde und ergibt sich zu  $\Delta T_{zuf} = 0,03$  s. Die systematische Abweichung, in die auch der Digitalisierungsfehler mit einbezogen wird, beträgt  $\Delta T_{sys} = 0,01$  s +  $5 \cdot 10^{-4} \cdot t = 0,01$  s, wobei der zweite Term aufgrund der kurzen Messdauer vernachlässigt wurde.

Für die Kreiseldrehzahl  $n$  ergeben sich folgende abgeschätzten Unsicherheiten:  $\Delta n_{zuf} = 0,3$  Hz aufgrund der Schwankung der Drehzahl und  $\Delta n_{sys} = 0,2$  Hz, da der Aufbau der Messvorrichtung unbekannt ist.

Der zufällige Fehler des Drehmoments lässt sich vernachlässigen, da die Versuchsanordnung nur einen sehr kleinen Spielraum für Schwankungen zulässt. Eine systematische Verschiebung der Werte ist allerdings nicht auszuschließen, weswegen eine systematische Unsicherheit von  $\Delta M_{sys} = 0,005$  N m abgeschätzt wird. Dieser Beitrag kommt fast vollständig aus der Unsicherheit der Massen, die hier auf  $\pm 3$  g abgeschätzt wurden, was auch an der fast vollständigen Symmetrie der systematischen Unsicherheiten zu sehen ist.

Mit diesen Rechnungen erhält man zehn Einzelwerte mit zufälligen und systematischen Unsicherheiten des Trägheitsmomentes:

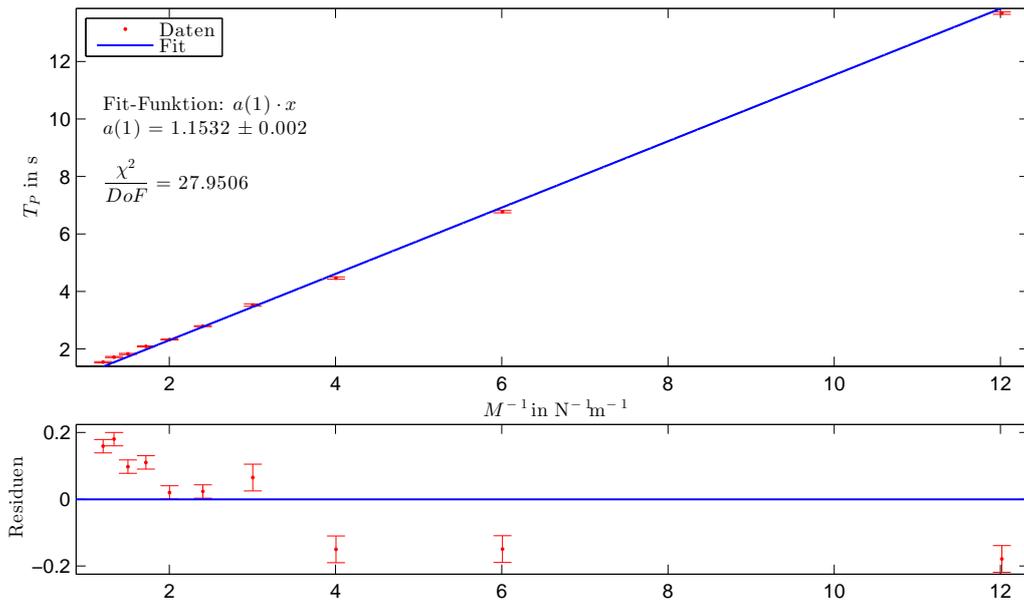
$J_x \cdot 10^3$ [kg m <sup>2</sup> ]	2,57	2,65	2,62	2,76	2,73	2,73	2,88	2,86	2,99	2,96
$\Delta J_{zuf} \cdot 10^5$ [kg m <sup>2</sup> ]	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9
$\Delta J_{sys}^+ \cdot 10^5$ [kg m <sup>2</sup> ]	20	13	11	10	9	9	9	9	9	9
$\Delta J_{sys}^- \cdot 10^5$ [kg m <sup>2</sup> ]	-20	-13	-10	-10	-9	-9	-9	-9	-9	-9

**Tab. 2:** aus den Messwerten gewonnene Trägheitsmomente sowie deren zufällige und systematische Unsicherheiten

Offensichtlich überlappen sich die Fehlerintervalle, so dass die Bildung eines gewichteten Mittelwertes möglich ist. Es ergibt sich daraus folgender Wert für das Trägheitsmoment:

$$J_{x,1} = (2,78 \pm 0,027_{zuf} \pm 0,033_{sys}) \cdot 10^{-3} \text{kg m}^2$$

Es ist allerdings auch eine andere Methode der Auswertung möglich: Die im Diagramm 1 dargestellten Messwerte wurden mit der Funktion  $T = a \cdot M^{-1}$  gefittet.



**Abb. 1:** Abhängigkeit der Präzessionsperiodendauer vom reziproken Drehmoment und der dazugehörige lineare Fit

Wie sich aus der Formel (1) erkennen lässt, muss  $a = 4 \cdot \pi^2 \cdot n \cdot J_x$  gelten. Bei dieser Betrachtung kann nicht mehr zwischen zufälligen und systematischen Unsicherheiten unterschieden werden, jedoch ergibt sich mit gaußscher Fehlerfortpflanzung folgendes Ergebnis:

$$J_{x,1,fit} = (2,73 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \text{kg m}^2$$

Diese Methode ist nicht ganz korrekt, da beim Fit von rein zufälligen Abweichungen ausgegangen wird, liefert aber trotzdem einen Vergleichswert zu dem oben gewonnenen.

## 2.2 $J_x$ : Präzession bei festem Drehmoment und variabler Drehzahl

$n$ in Hz	6,6	7,8	8,8	9,8	10,8	11,8	12,9	13,8	14,8	15,8
$T$ in s	2,22	2,59	2,91	3,00	3,56	3,82	4,16	4,44	4,68	5,06

**Tab. 3:** Messwerte für die Präzessionsperiodendauer in Abhängigkeit von der Kreiseldrehzahl bei festem externen Drehmoment

Bei dieser Messung wird das Drehmoment durch ein 200-g-Massenstück hervorgerufen und die Kreiseldrehzahl von ungefähr 6 Hz bis zu 16 Hz verändert. Es wird wiederum die Periodendauer der Präzessionsbewegung gemessen.

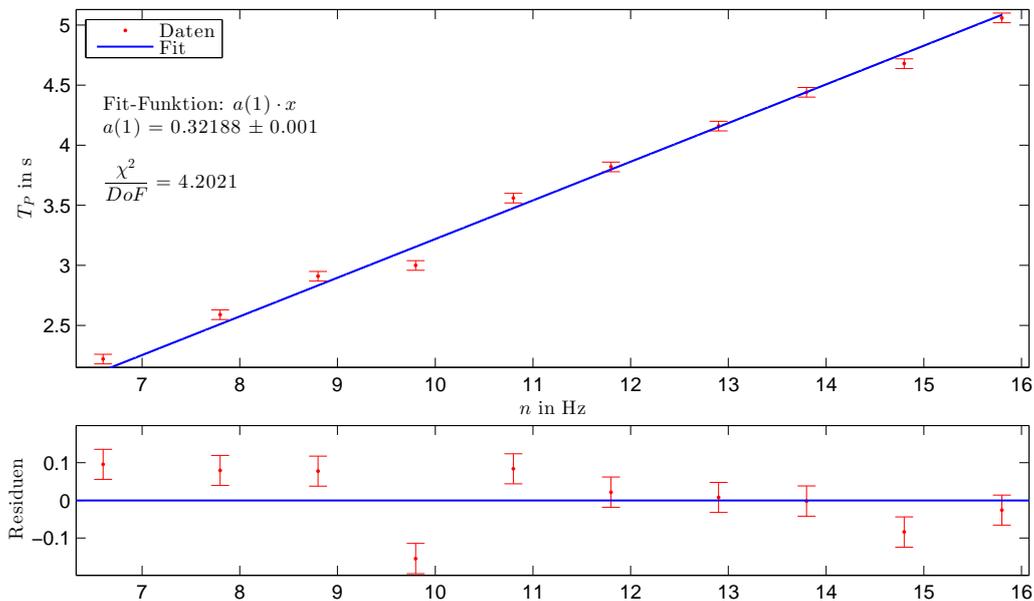
Aus diesen Messwerten kann, wie in den Formeln (1) bis (4) beschrieben, das Trägheitsmoment und die zufällige bzw. systematische Unsicherheit berechnet werden. Es ergeben sich die in Tabelle 4 dargestellten Werte.

$J_x \cdot 10^3$ [kg m <sup>2</sup> ]	2,84	2,80	2,79	2,58	2,78	2,73	2,72	2,71	2,67
$\Delta J_{zuf} \cdot 10^3$ [kg m <sup>2</sup> ]	0,13	0,11	0,10	0,08	0,08	0,07	0,07	0,06	0,06
$\Delta J_{sys}^+ \cdot 10^3$ [kg m <sup>2</sup> ]	0,16	0,13	0,12	0,10	0,10	0,10	0,09	0,09	0,08
$\Delta J_{sys}^- \cdot 10^3$ [kg m <sup>2</sup> ]	-0,14	-0,12	-0,11	-0,10	-0,10	-0,09	-0,09	-0,08	-0,08

**Tab. 4:** aus den Messwerten gewonnene Trägheitsmomente sowie deren zufällige und systematische Unsicherheiten

Aus diesen kann dann wie im vorherigen Kapitel beschrieben ein gewichtetes Mittel gebildet werden, so dass folgendes Gesamtergebnis entsteht (die Asymmetrie der systematischen Unsicherheiten verschwindet bei der Rundung):

$$J_{x,2} = (2,72 \pm 0,025_{zuf} \pm 0,034_{sys}) \cdot 10^{-3} \text{kg m}^2$$



**Abb. 2:** Abhängigkeit der Präzessionsperiodendauer von der Kreiseldrehzahl und der dazugehörige lineare Fit

In Diagramm 2 werden die Messwerte dargestellt und gefittet. Aus dem so gewonnenen Fitparameter  $a$  lässt sich ebenfalls ein Ergebnis berechnen. Aus Gleichung (1) ergibt sich  $4 \cdot \pi^2 \cdot J_x \cdot n = M \cdot T_P \Rightarrow J_x = M \cdot a \cdot (4 \cdot \pi^2)^{-1}$ . Die Unsicherheit wird durch eine gaußsche Fehlerfortpflanzung gewonnen, sodass das hiermit gewonnene Ergebnis wie folgt lautet:

$$J_{x,2,fit} = (2,71 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \text{kg m}^2$$

### 2.3 $J_x$ : Rechnerische Bestimmung

Zur rechnerischen Bestimmung des Trägheitsmomentes in der sich drehenden Scheibe wird diese in vier Hohlzylinder aufgeteilt, deren Trägheitsmomente addiert werden. Es ergibt sich folgende Formel:

$$J_{X,r} = -\frac{1}{2} \rho \pi \left[ h_1 (r_{11}^4 - r_{12}^4) + h_2 (r_{12}^4 - r_{22}^4) + h_3 (r_{22}^4 - r_{32}^4) + h_1 (r_{32}^4 - r_{42}^4) \right] \quad (5)$$

Die Größen wurden aus der am Arbeitsplatz ausliegenden Zeichnung des Gyroskops abgelesen und mit einem Messschieber bestätigt. Die Radien sind auf  $\Delta r = \pm 0,05 \text{ mm}$  genau, die Höhen auf  $\Delta l = \pm 0,1 \text{ mm}$  bzw.  $\Delta h = \pm 0,5 \text{ mm}$  genau. Die Massendichte  $\rho$  des Messings wird als fehlerfrei angenommen. Für die Unsicherheit des Trägheitsmoments gilt die gaußsche Fehlerfortpflanzung, da die systematische Unsicherheit des Messschiebers in der Größenordnung  $< 10^{-2} \text{ mm}$  liegt. Für die Unsicherheit des Endergebnisses gilt also:

$$\Delta J_X = \frac{1}{2} \pi \rho \left[ 16 \Delta r^2 h_1^2 r_{11}^6 + 16 \Delta r^2 (h_1 - h_2)^2 r_{12}^6 + 16 \Delta r^2 (h_2 - h_3)^2 r_{22}^6 + \Delta h^2 (r_{12}^4 - r_{22}^4)^2 + 16 \Delta r^2 (h_1 - h_3)^2 r_{32}^6 + \Delta h^2 (r_{22}^4 - r_{32}^4)^2 + 16 \Delta r^2 h_1^2 r_{42}^6 + \Delta l^2 (r_{11}^4 - r_{12}^4 + r_{32}^4 - r_{42}^4)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Das vollständige Ergebnis lautet dann, wenn für die Dichte des Messings der im Skript angegebene Wert von  $\rho = 8,4 \text{ g cm}^{-3}$ :

$$J_{x,ber,-} = (2,59 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \text{kg m}^2$$

Allerdings ist Messing eine Legierung - demzufolge liegt die Massendichte eher in einem Intervall<sup>2</sup> von  $\rho_{min} = 8,4 \text{ g cm}^{-3}$  bis  $\rho_{max} = 8,9 \text{ g cm}^{-3}$ . Wenn mit dem höchsten hier angegebenen Wert gerechnet wird, ergibt sich

$$J_{x,ber,+} = (2,74 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \text{kg m}^2$$

$n$ in Hz	3,7	4,7	5,7	6,9	7,8	8,8	9,7	10,9	11,9
$T$ in s	1,06								
$2T$ in s		1,75	1,22						
$5T$ in s				2,28	2,00	1,87	1,66	1,53	1,41
$T$ in s	1,06	0,88	0,61	0,46	0,40	0,37	0,33	0,31	0,28

**Tab. 5:** Messwerte für die Periodendauer der Nutation in Abhängigkeit von der Kreiseldrehzahl im Gleichgewichtszustand des Gyroskops

## 2.4 $J_s$ : Nutation bei variabler Drehzahl

Ziel dieser Messung ist die Bestimmung des Trägheitsmoments des Gyroskops um eine beliebige andere Hauptträgheitsachse. Dazu wird es mit dem verschiebbaren Massenstück ins Gleichgewicht gebracht, die Drehscheibe auf verschiedene Drehzahlen gebracht und dem Gyroskop ein leichter Stoß versetzt. Dies leitet eine Nutationsbewegung ein, da  $\vec{L}$  und  $\vec{\omega}$  nicht mehr parallel zueinander sind. Die Frequenz dieser Nutationsbewegung wird gemessen (siehe Tabelle 5 sowie Diagramm 3) - aus ihr kann mit folgender Gleichung das Trägheitsmoment in z-Richtung (eigentlich eine beliebige Richtung senkrecht zur Symmetrieachse des Aufbaus) errechnet werden:

$$J_S = T_N \cdot J_x \cdot n \quad (6)$$

Für den zufälligen Fehler gilt laut gaußscher Fehlerfortpflanzung

$$\Delta J_{S,zuf} = \sqrt{(T_N \cdot J_x)^2 \cdot \Delta n_{zuf}^2 + (T_N \cdot n)^2 \cdot \Delta J_{x,zuf}^2 + (J_x \cdot n)^2 \cdot \Delta T_{N,zuf}^2} \quad (7)$$

Für den systematischen Fehler werden wieder zwei Größtfehlerabschätzungen durchgeführt:

$$\Delta J_{S,sys}^+ = (T_N + \Delta T_{N,sys}) \cdot (J_x + \Delta J_{x,sys}) \cdot (n + \Delta n_{sys}) - J_S \quad (8)$$

$$\Delta J_{S,sys}^- = (T_N - \Delta T_{N,sys}) \cdot (J_x - \Delta J_{x,sys}) \cdot (n - \Delta n_{sys}) - J_S \quad (9)$$

Es ergeben sich die in Tabelle 6 dargestellten Werte für das Trägheitsmoment und die zugehörigen Unsicherheiten. Für das Trägheitsmoment in x-Richtung wird der gewichtete Mittelwert von  $J_{x,1}$  und  $J_{x,2}$  verwendet, für den sich

$$\bar{J}_X = (2,75 \pm 0,019_{zuf} \pm 0,024_{sys}) \cdot 10^{-3} \text{kg m}^2$$

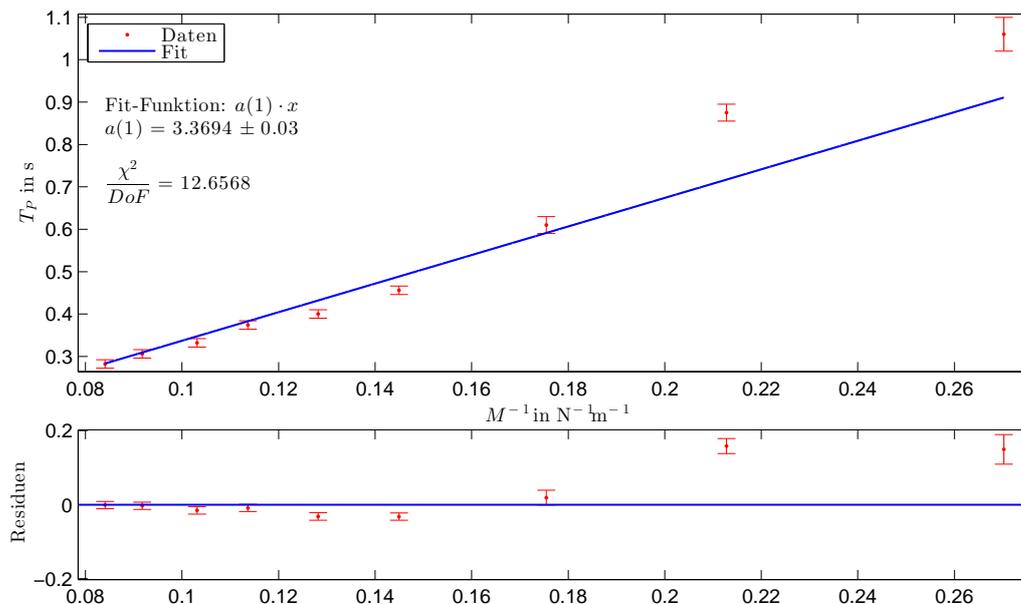
ergibt. Aus diesen Daten kann nun wieder ein gewichtetes Mittel gebildet werden, was zu folgendem Ergebnis für das Trägheitsmoment  $J_Z$  führt:

$$J_S = (9,47 \pm 0,13_{zuf} \pm 0,20_{sys}) \cdot 10^{-3} \text{kg m}^2$$

<sup>2</sup>[http://www.kupferinstitut.de/front\\_frame/frameset.php3?client=1&lang=1&idcat=33&parent=14](http://www.kupferinstitut.de/front_frame/frameset.php3?client=1&lang=1&idcat=33&parent=14), siehe Werkstoffdatenblätter

$J_s \cdot 10^3$ [kg m <sup>2</sup> ]	10,79	11,31	9,57	8,66	8,58	9,05	8,86	9,18	9,23
$\Delta J_{zuf} \cdot 10^3$ [kg m <sup>2</sup> ]	0,92	0,75	0,55	0,39	0,35	0,34	0,31	0,30	0,29
$\Delta J_{sys}^+ \cdot 10^3$ [kg m <sup>2</sup> ]	0,79	0,72	0,58	0,52	0,52	0,54	0,54	0,56	0,57
$\Delta J_{sys}^- \cdot 10^3$ [kg m <sup>2</sup> ]	-0,77	-0,70	-0,57	-0,51	-0,50	-0,52	-0,52	-0,54	-0,55

**Tab. 6:** aus den Messwerten gewonnene Trägheitsmomente sowie deren zufällige und systematische Unsicherheiten



**Abb. 3:** Abhängigkeit der Nutationsperiodendauer vom reziproken Drehmoment und der dazugehörige lineare Fit

### 3 Vergleich der Ergebnisse

Die in der Tabelle 7 aufgetragenen Ergebnisse für die aus den Periodendauern und aus der Geometrie des Gyroskops bestimmten Werte von  $J_X$  stimmen sehr gut überein, wenn bei der Bestimmung aus der Geometrie eine höhere als die im Skript angegebene Massendichte verwendet wird. Sonst trifft der aus der Präzessionsbewegung bestimmte Wert den geometrischen erst mit der vierfachen Unsicherheit, was also entweder auf einen unberücksichtigten statistischen Fehler oder einen erheblich zu klein abgeschätzten zufälligen Fehler schließen lässt.

Die mit den Fits vorgenommene Auswertung bestätigt die durch einzelne Berechnung und Mittelwertbildung gewonnenen Ergebnisse. Allerdings geht dabei die Unterscheidbarkeit der systematischen und zufälligen Fehler verloren - diese liefern

	Messung aus $T_P$ bzw. $T_N$	geometrisch
$J_X \cdot 10^3$ [kg m <sup>2</sup> ]	$2,75 \pm 0,019_{zuf} \pm 0,024_{sys}$	$2,59...2,74 \pm 0,03$
$J_S \cdot 10^3$ [kg m <sup>2</sup> ]	$9,47 \pm 0,13_{zuf} \pm 0,20_{sys}$	$9,7 \pm 0,5$

**Tab. 7:** Vergleich der verschiedenen Ergebnisse

in diesem Fall aber sowieso keine Hinweise auf eine Verbesserung des Versuchsaufbaus, da sie in etwa gleich groß sind.

Der aus der Nutation des Gyroskops bestimmte Wert für  $J_S$  stimmt im Rahmen der Unsicherheit allerdings gut mit dem im Skript angegebenen geometrische bestimmten Referenzwert überein. Wenn allerdings bei der rechnerischen Bestimmung von  $J_X$  eine höhere Massendichte verwendet wird, müsste diese auch in diesen Referenzwert eingehen und ihn nicht unwesentlich erhöhen. Dank des erheblich größeren Fehlerintervalls liegt der so gewonnene Wert aber vermutlich trotzdem noch innerhalb der zweifachen Unsicherheit der Ergebnisse.

Bei den Ergebnissen lässt sich keine signifikanter Unterschied zwischen den Auswirkungen der systematischen und der zufälligen Fehler feststellen. Die Ergebnis würden sich also verbessern, wenn weitere Messungen durchgeführt werden und vor allem ein Motor mit höherer Drehzahlstabilität verwendet würde, aber auch ein exakterer Messaufbau würde für weniger Unsicherheiten im Endergebnis sorgen.