

Protokoll Grundpraktikum I: F7 Statistik und Radioaktivität

Sebastian Pfitzner

13. Mai 2013

Durchführung: Sebastian Pfitzner (553983), Anna Andrie (550727)

Arbeitsplatz: Platz 2

Betreuer: Michael Große

Versuchsdatum: 08.05.2013

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbetrachtungen	1
2	Messwerte und Auswertung	3
2.1	Nulleffekt	3
2.2	Verteilung der Emissionsrate	3
2.2.1	Cäsium-137	3
2.2.2	Cobalt-60	4
2.3	Absorption von Gamma-Strahlung	5
3	Diskussion	7
3.1	Statistische Verteilungen	7
3.2	Absorption und Photonenenergie	7

1 Vorbetrachtungen

In diesem Versuch geht es um die Eigenschaften von Zerfallsprozessen in Cäsium-137 und Cobalt-60 sowie um die Durchdringungseigenschaften der von ihnen ausgestrahlten γ -Strahlung. Zur Messung wurde ein Geiger-Müller-Zählrohr verwendet, das ionisierende Strahlung registriert: Wenn ein Teilchen (also He^{2+} , e^- , e^+ oder ein γ -Quant) mit hoher Energie auf das Gas im Innern des Zählrohrs trifft, ionisiert es einige Gasatome, die vom sie umgebenden elektrischen Feld beschleunigt

werden. Deshalb können sie wiederum andere Atome ionisieren, so dass ein Stromfluss möglich wird, der gemessen werden kann. Nach einer Totzeit von rund 100 μs ist die Ionisation des Gases weitestgehend aufgehoben und das nächste Teilchen kann registriert werden.

Im ersten Teil des Versuchs werden die registrierten Ereignisse über eine Zeitspanne von 2 s für Cs-137 bzw. 10 s für Co-60 aufsummiert. Die Ergebnisse sollten einer Poisson-Verteilung gehorchen, die für große Werte durch eine spezielle Gaußsche Normalverteilung mit $\sigma^2 = \mu = \bar{x}$ angenähert werden kann.

$$P(x) = \frac{\bar{x}^x}{x!} \cdot e^{-\bar{x}} \quad (1)$$

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{x}}} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2 \cdot \bar{x}}\right) \quad (2)$$

$$P(x) \xrightarrow{\bar{x} \gg x - \bar{x}} G(x) \quad (3)$$

Dieser Sachverhalt wird im Folgenden überprüft. Aus den normierten Abweichungen von theoretischer und experimenteller Verteilung lässt sich die Testgröße χ^2 wie folgt berechnen, mit der sich eine Irrtumswahrscheinlichkeit abschätzen lässt, zu der die Nullhypothese (also die angenommene Häufigkeitsverteilung) verworfen werden muss.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(k_j - n \cdot P_j)^2}{n \cdot P_j} \quad (4)$$

k_j ist hier die Anzahl der experimentell gewonnenen Daten, die in die j -te Klasse fallen, n ist die Gesamtzahl der Durchläufe und P_j die theoretische Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung in die j -te Klasse fällt.

Der zweite Teil des Versuchs beinhaltet die Untersuchung der Absorptionseigenschaften von Blei bezüglich Gamma-Strahlung. Vermutet wird eine exponentielle Abhängigkeit der Strahlungsintensität (proportional zur Zählrate) von der Dicke der zwischen Quelle und Detektor liegenden Bleischicht:

$$I(z) = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot z} \quad (5)$$

Hieraus ergibt sich bei $I(d_{\frac{1}{2}}) = \frac{I_0}{2}$ für die Halbwertsdicke $d_{\frac{1}{2}}$:

$$d_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\mu} \quad (6)$$

Eine weitere Kenngröße ist der Massenschwächungskoeffizient mit ρ als Massendichte

$$k_m = \frac{\mu}{\rho} \quad (7)$$

2 Messwerte und Auswertung

Bei allen Versuchen wurde das Geiger-Müller-Zählrohr im Plateubereich bei $U = 900\text{ V}$ betrieben.

2.1 Nulleffekt

Zuerst wurde der Nulleffekt gemessen, der aus dem ständigen Vorhandensein ionisierender Strahlung in unserer Umwelt resultiert.

Hierfür wurde die Zeit gemessen, die das Geiger-Müller-Zählrohr benötigt, um $A_0 = 200$ dieser Ereignisse zu registrieren. Das Ergebnis lautet

$$t_0 = (755,05 \pm 0,01)\text{s} \quad (8)$$

wobei die Ungenauigkeit der Uhr den einzigen Beitrag zur Unsicherheit des Ergebnisses liefert. Obwohl die Totzeit des Zählrohrs auch einen Einfluss auf den Nulleffekt hat, wurde dieser hier nicht berücksichtigt. Der Grund dafür ist, dass im Mittel solche schnell aufeinanderfolgenden Ereignisse bei jeder Messung gleich häufig auftreten und deshalb durch die Differenzbildung verschwinden. Die Nullimpulsrate I_0 mit einem poissonverteilten A_0 (also $\Delta A_0 = \sqrt{A_0}$) beträgt

$$\Delta I_0 = \sqrt{\left(\frac{1}{t_0}\right)^2 \Delta A_0^2 + \left(-\frac{A_0}{t_0^2}\right)^2 \Delta t_0^2}$$
$$I_0 = \frac{200 \pm \sqrt{200}}{(755,05 \pm 0,01)\text{s}} = (0,26 \pm 0,04) \frac{1}{\text{s}}$$

2.2 Verteilung der Emissionsrate

2.2.1 Cäsium-137

Bei der Messung mit Cäsium-137 wird Probe Nummer 4 verwendet, die im dritten Fach von oben auf einem dünnen Träger angebracht ist. Es wird die Zahl der registrierten Ereignisse in jeweils 2 s aufsummiert, was 500 Mal wiederholt wurde¹.

Bei einer Klassenzahl von 8 und einer Klassenbreite von 1 ergibt sich das Histogramm in Abb. 1, wobei die letzten drei Klassen zu einer zusammengefasst wurden, sodass $n \cdot P_j \geq 5$ gilt:

Die eingezeichneten Verteilungen ergeben sich aus (1) und (2), wobei für $\bar{x} = \mu = 2,81$ der Mittelwert aller Daten benutzt wird und für die Standardabweichung $\sigma = 1,70 \approx \sqrt{\mu} = 1,68$. Aus (4) lässt sich für beide Hypothesen das zugehörige χ^2 ermitteln:

$$\chi_p^2 = 3,78$$

$$\chi_g^2 = 30,40$$

¹Originaldaten zu finden in 130508CS.TSV

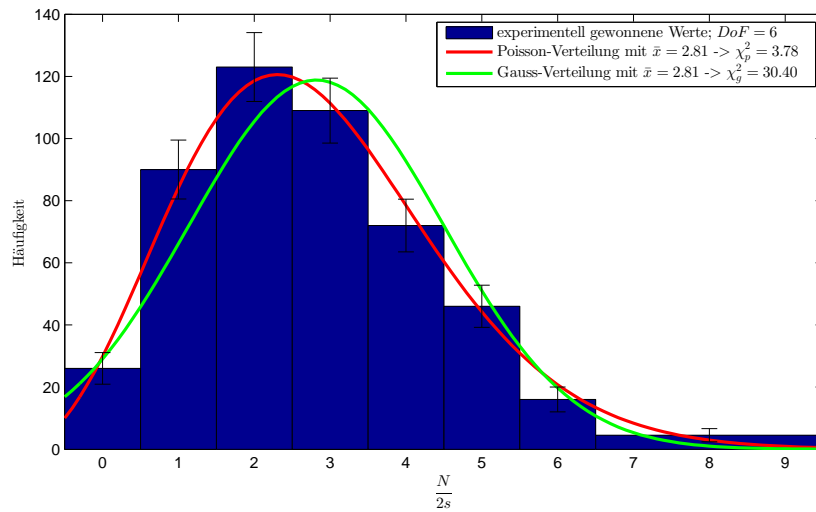


Abb. 1: Histogramm der Häufigkeitsverteilung der von Cs-137 ausgesandten γ -Strahlung mit passender Poisson- und Gauß-Verteilung

Bei den vorliegenden sechs Freiheitsgraden $f = N_K - 2$ (Klassenzahl N_K , ein freier Parameter \bar{x} in der Verteilung und die Normierungsbedingung) lässt sich die Irrtumswahrscheinlichkeit aus der Tabelle im Skript wie folgt ablesen:

$$\alpha_p = 0,70 \dots 0,90$$

$$\alpha_g < 0,001$$

2.2.2 Cobalt-60

Die Messung des Cobalt-60 wird Probe 5 im ersten Fach von oben ebenfalls auf dem dünnen Objektträger verwendet. Hier wird die Häufigkeit über jeweils 10 s - bei wiederum 500 Durchläufen - aufsummiert².

Die Messwerte sind im Histogramm in Abbildung 2 dargestellt, wobei es zwölf Klassen mit einer Breite von 2 gibt, bei denen die jeweils äußersten vier zusammengefasst wurden, um zugewährleisten dass jedes $n \cdot P_j$ größer als fünf ist.

Abermals ergeben sich die geplotteten Verteilungen aus (1) und (2) mit $\bar{x} = \mu = 35,59$ und einer Standardabweichung von $\sigma = 5,61 \approx \sqrt{\mu} = 5,97$. Die χ^2 -Werte ergeben sich zu:

$$\chi_p^2 = 10,74$$

$$\chi_g^2 = 9,79$$

woraus eine Irrtumswahrscheinlichkeit von

$$\alpha_p = \alpha_g = 0,30 \dots 0,50$$

resultiert.

²Originaldaten in 130508CO.TSV

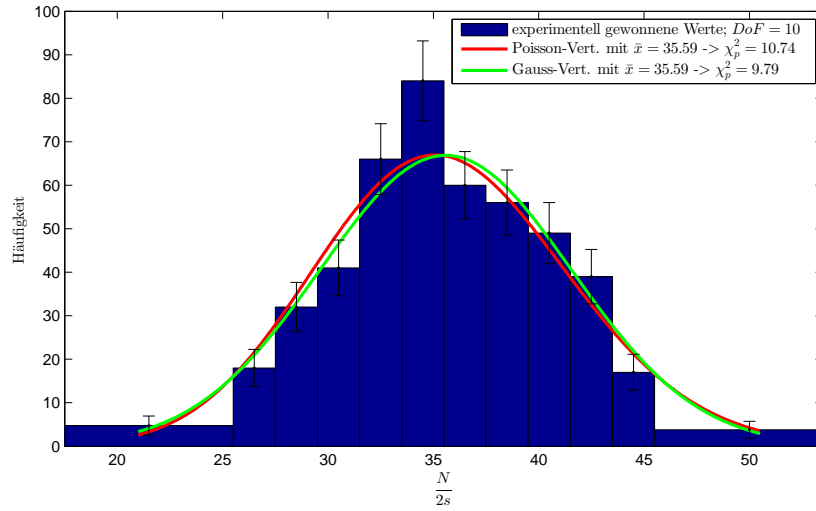


Abb. 2: Histogramm der Häufigkeitsverteilung der von Co-60 ausgesandten γ -Strahlung mit passender Poisson- und Gauß-Verteilung

2.3 Absorption von Gamma-Strahlung

Zur Bestimmung des Absorptionskoeffizienten von Blei werden sechs Messungen durchgeführt: Die erste ohne Bleiplatte zwischen dem verwendeten Cs-137 im zweiten Fach von oben (wie oben Probe Nummer 4) und dem Geiger-Müller-Zählrohr, dann mit ansteigend dicken Bleiplatten. Die Tabelle 1 zeigt die Zeiten auf, die zum Erfassen von $A_i = 800$ Ereignissen benötigt wurden.

Für die Ungenauigkeiten gilt die gaußsche Fehlerfortpflanzung, weswegen die folgenden Beziehungen gelten

$$\Delta I_i = \sqrt{\left(\frac{1}{t_i}\right)^2 \Delta A_i^2 + \left(-\frac{A_i}{t_i^2}\right)^2 \Delta t_i^2} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Delta f_i &= \Delta \frac{I_i - I_0}{I_1 - I_0} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{I_i - I_0}\right)^2 \Delta I_i^2 + \left(\frac{I_i - I_1}{(I_1 - I_0)^2}\right)^2 \Delta I_0^2 + \left(-\frac{1}{(I_1 - I_0)^2}\right)^2 \Delta I_1^2} \end{aligned} \quad (10)$$

(10) gilt jedoch nur für $i > 1$, da $f_1 = 1$ unabhängig von den eingesetzten Werten gilt und demzufolge alle partiellen Ableitungen und damit auch die Ungenauigkeit Null sind. ΔI_0 wurde bereits beim Nulleffekt bestimmt, ΔI_i für $i = 1, \dots, 6$ wird aus (9) bestimmt.

Aus dem mithilfe des Fits gewonnenen Absorptionskoeffizienten $\mu = (0,11 \pm$

i	1	2	3	4	5	6
Dicke in mm	0	1	1,7	3,3	6,8	11,2
t_i [s] für 800 counts	393,52	480,64	461,83	560,02	713,35	974,07
$f_i = \frac{I_i - I_0}{I_1 - I_0}$	1	0,79	0,83	0,66	0,48	0,32
Δf_i	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06

Tab. 1: Zeiten, die benötigt werden, um 800 Ereignisse hinter entsprechend dicken Bleiplatten zu registrieren

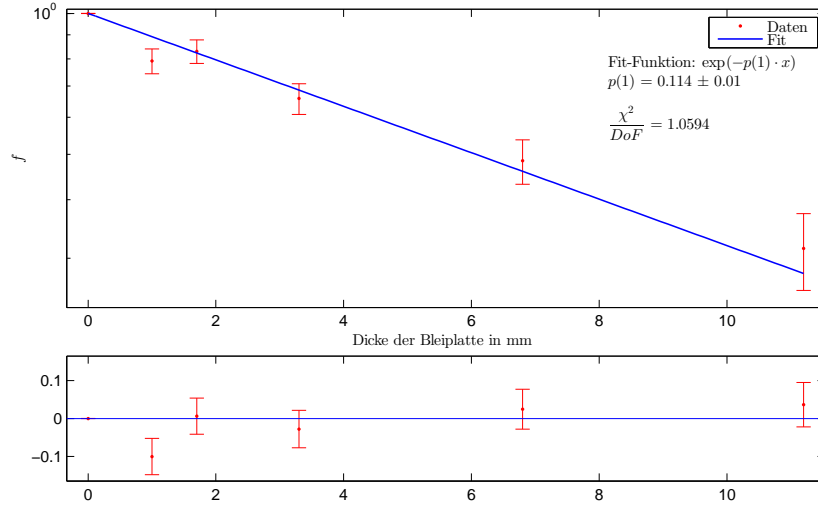


Abb. 3: Semilogarithmische Darstellung der Daten und des Fits in Abhängigkeit von der Dicke der Bleiplatte

$0,01\text{mm}^{-1}$ lässt sich aus (6) die Halbwertsdicke und aus (7) der Massenschwächungskoeffizient berechnen:

$$d_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{(0,11 \pm 0,01)\text{mm}^{-1}} \quad k_m = \frac{(0,11 \pm 0,01)\text{mm}^{-1}}{\rho_{Pb}}$$

Für die Massendichte gilt $\rho_{Pb} = (11,340 \pm 0,001)\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Die Unsicherheiten ergeben sich nach der gaußschen Fehlerfortpflanzung wie folgt:

$$\Delta d_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(-\frac{\ln 2}{\mu^2}\right)^2 \cdot \Delta \mu^2} \quad \Delta k_m = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_{Pb}}\right)^2 \cdot \Delta \mu^2 + \left(-\frac{\mu}{\rho_{Pb}^2}\right)^2 \cdot \Delta \rho^2}$$

Die vollständigen Ergebnisse lauten also

$$d_{\frac{1}{2}} = (6,1 \pm 0,5)\text{mm} \quad k_m = (0,101 \pm 0,009)\frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$$

Mit diesen Werten lässt sich nun aus den Abbildungen 5 und 6 im gelben Skript die Photonenenergie durch Ablesen bestimmen; die Ungenauigkeiten sind abgeschätzt:

$$E_d = (0,7 \pm 0,04)\text{MeV} \qquad E_k = (0,7 \pm 0,02)\text{MeV}$$

3 Diskussion

3.1 Statistische Verteilungen

Die statistische Untersuchung der Emission von γ -Quanten durch das Cs-137-Präparat zeigt eine starke Übereinstimmung von Theorie und Experiment. Der α -Wert von 0,7 bis 0,9 für die Poisson-Verteilung besagt, dass die Hypothese, dass die Daten eben jener Verteilung gehorchen, mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% bis 90% *nicht* zurückgewiesen werden kann. Im Gegensatz dazu bedeutet der äußerst kleine α -Wert der Gauß-Verteilung, dass sie mit einer hohen Wahrscheinlichkeit $> 99,9\%$ nicht zu den vorliegenden Daten passt.

Für größere Mittelwerte - wie sie beim betrachteten Co-60 vorliegen - sollte sich die Poisson-Verteilung an eine spezielle Gauß-Verteilung annähern (siehe (2)). Dieses Verhalten wird sowohl durch die χ^2 - und α -Werte wie auch durch die grafische Darstellung in Abbildung 2 bestätigt. Dass der $\chi_g^2 < \chi_p^2$ gilt, ist auf statistische Schwankungen zurückzuführen. Weiterhin ist der Unterschied klein genug, um einen nur äußerst geringen Einfluss auf die α -Werte zu haben. Demzufolge können beide Hypothesen mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% bis 50% abgelehnt werden.

3.2 Absorption und Photonenenergie

Aus dem Diagramm 3 und auch aus der Tabelle 1 wird deutlich, dass der Wert zu $i = 2$ einen Ausreißer darstellt. Das kann einerseits auf eine ungenau vermessene Bleiplatte zurückgehen, andererseits aber auch nur statistischer Natur sein. Das reduzierte $\frac{\chi^2}{DoF} \approx 1$ suggeriert, dass alle Abweichungen statistischer Natur sind - andererseits stimmen die Ungenauigkeiten der einzelnen Datenpunkte nicht ganz, da keine Angaben über die Unsicherheit der Dicke der Bleiplatten bekannt sind. Somit lässt sich ein systematischer Fehler bei der Bleiplatte mit $d = 1\text{ mm}$ nicht ausschließen.

Die Energie ließe sich aus den gemessenen Daten durchaus genauer bestimmen als hier geschehen, dafür müsste allerdings eine Formel für die Abhängigkeit der Photonenenergie vom Massenschwächungskoeffizienten oder von der Halbwertsdicke gegeben sein; auch eine feinere Achseneinteilung in den Diagrammen 5 und 6 würde schon weiterhelfen. Es lassen sich Vergleichswerte von $E_r = 0,662\text{MeV}$ finden³ ⁴. Die im Experiment bestimmten Energien liegen nahe an der Referenz,

³<http://www.ptb.de/de/org/6/63/bestrahl/bestrahl.htm>

⁴<http://www.csupomona.edu/pbsiegel/bio431/gennergies.html>

allerdings sind sie etwas zu hoch. Ein möglicher Grund dafür ist eine Art Fokussierung der Gamma-Strahlung durch die Compton-Streuung, aufgrund derer bei eingebrachter Bleiplatte mehr Ereignisse registriert werden als ohne Streuung auftreten würden, so dass der Betrag des Anstiegs der Gerade in semilogarithmischer Darstellung sich verringert. Da zur Bestimmung der Halbwertsdicke durch eben diesen Parameter dividiert wird, erscheint die Halbwertsdicke größer als sie eigentlich ist, was eine höhere Energie suggeriert.