# Protokoll Grundpraktikum: F5 Dichte fester Körper

Sebastian Pfitzner

6. Februar 2013

**Durchführung**: Sebastian Pfitzner (553983), Jannis Schürmer (552892)
**Arbeitsplatz:** 4
**Betreuer:** Anicó Kulow
**Versuchsdatum:** 30.01.2013

## Inhaltsverzeichnis



## 1 Vorbetrachtungen

In diesem Versuch ging es um die Bestimmung der Dichte fester Körper. Benutzt wurden hierbei die Kräfte, die das jeweilige Massenstück, ein wassergefülltes Pyknometer und das Massenstück im Pyknometer auf die verwendete Analysenwaage ausüben. Unter Berücksichtigung der Auftriebskräfte in Wasser bzw. Luft kann dann die Dichte nach der im weißen Skript des Grundpraktikums beschriebenen und in der Auswertung verwendeten Formel berechnet werden. Die beiden ausgewählten Massenstücke können dem Aussehen nach als Aluminium (Probe 1) und

Kupfer (Probe 2) identifiziert werden, aber eine genauere Einordnung ist erst nach der Auswertung der gewonnenen Dichten und dem Vergleich mit Literaturwerten möglich.

## 2 Messwerte

Um eine statistische Auswertung der Daten zu ermöglichen wurden die drei verschiedenen Massen pro Probekörper jeweils sechs Mal gemessen. Interessanterweise nahm die angezeigte Masse mehrere Minuten lang konstant ab, wenn ein Pyknometer bzw. Wasser an der Messung beteiligt war. Dies ist höchstwahrscheinlich auf Verdunstung des Wassers zurückzuführen. Die Temperaturdifferenz zwischen dem Wasser und der Luft innerhalb der Analysenwaage ließe sich ebenfalls als Grund heranziehen, da das Wasser kälter war und demzufolge die Luft abgekühlt würde. Kältere Luft hat allerdings eine höhere Dichte und ruft deshalb eine höhere Auftriebskraft hervor, sodass die von der Waage angezeigte Gewichtskraft sinkt.

Der erste angezeigte Wert blieb jedoch mehrere Sekunden lang stabil, sodass dieser auch verwendet wurde.

### 2.1 Masse $m_1'$ der beiden Proben

Die angezeigten Werte blieben bei diesen Messungen für sehr lange Zeit konstant. In der nachfolgenden Tabelle sind die Messwerte mit zugehörigem Mittelwert aufgetragen.

| Messung | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\bar{m}_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m'_{1,p1}$ in g | 2,7500 | 2,7502 | 2,7500 | 2,7501 | 2,7500 | 2,7501 | 2,7501 |
| $m'_{1,p2}$ in g | 8,9543 | 8,9543 | 8,9543 | 8,9542 | 8,9543 | 8,9542 | 8,9543 |

Die Standardabweichung beträgt

$$\sigma_{m'1,p1} = 8{,}1650 \cdot 10^{-5}\mathrm{g}$$
$$\sigma_{m'1,p2} = 5{,}1640 \cdot 10^{-5}\mathrm{g}$$

Die zufällige Messabweichung lässt sich dank der ausreichend groß gewählten Stichprobengröße $n \geq 6$ durch den Konfidenzintervall ausdrücken:

$$\Delta^z_{m'1,p1} = \bar{\sigma}_{m1,p1} = 3{,}3333 \cdot 10^{-5}\mathrm{g}$$
$$\Delta^z_{m'1,p2} = \bar{\sigma}_{m1,p2} = 2{,}1082 \cdot 10^{-5}\mathrm{g}$$

Als systematische Messabweichung kanndie kann die Garantiefehlergrenze der Waage angenommen werden, die 0,2 mg beträgt. Demzufolge beträgt der gesamte Fehler (gewonnen durch pythagoreische Addition der beiden Ungenauigkeiten) für diesen beiden Messungen $\Delta_{m1,p1} = 5{,}3333 \cdot 10^{-5}$g bzw. $\Delta_{m1,p1} = 4{,}1082 \cdot 10^{-5}$g, sodass das vollständige Messergebnis wie folgt lautet:

$$m'_{1,p1} = (2{,}7501 \pm 3{,}3 \cdot 10^{-5})\text{g}$$
$$m'_{1,p2} = (8{,}9543 \pm 2{,}1 \cdot 10^{-5})\text{g}$$

### 2.2 Masse $m'_2$ des Pyknometers

In der folgenden Tabelle sind die Einzelmessungen zur scheinbaren Masse des Pyknometers sowie deren Mittelwert dargestellt. Der erste angezeigte Wert (über mehrere Sekunden stabil) wurde notiert.

| Messung | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\bar{m}_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m'_2$ in g | 52,0952 | 52,0964 | 52,097 | 52,097 | 52,0938 | 52,0947 | 52,0957 |

Wiederum setzt sich die Gesamtungenauigkeit aus dem Konfidenzintervall und der Garantiefehlergrenze der Analysenwaage zusammen:

$$\Delta_{m'_2} = \sqrt{\left(\bar{\sigma}_{m'_2}\right)^2 + \left(\Delta^s_{m'_2}\right)^2} = \sqrt{(5{,}3939 \cdot 10^{-4}\text{g})^2 + (2 \cdot 10^{-4}\text{g})^2} = 5{,}7528 \cdot 10^{-4}\text{g}$$

Demzufolge lautet das vollständige Ergebnis

$$m'_2 = (52{,}0957 \pm 5{,}8 \cdot 10^{-4})\text{g}$$

### 2.3 Masse $m'_3$ des Pyknometers und der beiden Proben

In der folgenden Tabelle sind die Einzelmessungen zur scheinbaren Masse des Pyknometers und der Probekörper sowie deren Mittelwert dargestellt. Wie bei $m'_2$ wurde der erste angezeigte Wert notiert. Wie bereits für $m'_1$ und $m'_2$ beschrie-

| Messung | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\bar{m}_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m'_{3,p1}$ in g | 53,8166 | 53,8203 | 53,8147 | 53,8203 | 53,8138 | 53,8167 | 53,8171 |
| $m'_{3,p2}$ in g | 60,049 | 60,0506 | 60,0466 | 60,0475 | 60,0474 | 60,0425 | 60.0473 |

ben setzt sich auch hier die gesamte Messungenauigkeit aus pythagoreischer Addition von Garantiefehlergrenze und Konfidenzintervall ($\bar{\sigma}_{m3,p1} = 11 \cdot 10^{-4}$g bzw. $\bar{\sigma}_{m3,p2} = 11 \cdot 10^{-4}$g) zusammen. Das vollständige Ergebnis lautet

$$m'_{3,p1} = m'_2 = (52{,}8171 \pm 11 \cdot 10^{-4})\text{g}$$
$$m'_{3,p2} = m'_2 = (60{,}0473 \pm 11 \cdot 10^{-4})\text{g}$$

### 2.4 Weitere Messgrößen

Zur Bestimmung der Auftriebskräfte sind weitere Messwerte erforderlich: Die Lufttemperatur $T_L$, die Wassertemperatur $T_W$, der Luftdruck $p_L$ und die Luftfeuchtigkeit $\phi_L$. Die Temperaturen wurden mit einem Thermometer, die relative Luftfeuchtigkeit mit einer Wetterstation und der Luftdruck mit einem Barometer gemessen. Für die Raumtemperatur ergaben sich durch die Körperwärme der im Raum anwesenden Personen unterschiedliche Werte vor und nach dem Versuch - diese Abweichung betrug jedoch nur 0,5°C, sodass von einem Ausgleich abgesehen wurde.

| | |
|---|---|
| $T_L$ in °C | 23 |
| $T_W$ in °C | 22 |
| $p_l$ in Pa | 1003 |
| $\phi_L$ | 0,35 |

## 3 Auswertung

Die gewonnenen Messwerte sind unkorrigierte Daten, d.h. für eine Vermeidung des durch den Auftrieb in Luft bzw. Wasser verursachten systematischen Fehlers muss dieser korrigiert werden. Die Kraft, die auf die Analysenwaage wirkt, ist durch den Auftrieb im Gegensatz zur "echten" Masse vermindert - diese muss demzufolge wie im Skript beschrieben abgezogen werden. Aus

$$m_1 - V_1 \cdot \rho_L = m_1'$$
$$m_2 - V_p \cdot \rho_L = m_2'$$
$$m_3 - V_p \cdot \rho_L = m_3'$$
$$m_1 - V_1 \cdot \rho_W = m_3' - m_2'$$

ergibt sich

$$\rho = \frac{m_1}{V_1} = \frac{m_1' \cdot \rho_W - (m_3' - m_2') \cdot \rho_L}{m_1' - m_3' + m_2'}$$

Durch simples Einsetzen erhält man die Dichten für die beiden Proben,

$$\rho_1 = 2665{,}4 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$
$$\rho_2 = 8901{,}0 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

wobei $\rho_L$ und $\rho_W$ aufgrund ihrer Temperatur- als auch Druckabhängigkeit noch genauer bestimmt wurden. Für $\rho_W$ lässt sich die Dichte in Abhängigkeit von der Temperatur wie folgt bestimmen (in $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$):

$$\rho_W(T_W) = 999{,}84 + 6{,}62 \cdot 10^{-2} \cdot T_W - 8{,}768 \cdot 10^{-3} \cdot T_W^2 + 7{,}72 \cdot 10^{-7} \cdot T_W^4$$
$$\rho_W(22\,°\mathrm{C}) = 997{,}7654 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Hier kann die Druckabhängigkeit vernachlässigt werden, da die einzige Abweichung vom Normaldruck durch den Luftdruck zustande kommen könnte. Dieser allerdings hat keinen relevanten Einfluss, da für eine Druckveränderungen in Flüssigkeiten verhältnismäßig hohe Kräfte auftreten müssen.

Die Dichte der Luft ist allerdings sowohl von der Temperatur, der Luftfeuchtigkeit als auch vom Druck abhängig. Es gilt

$$\rho_L = \frac{p}{R_f \cdot T_L}$$

mit

$$R_f = \frac{R_l}{1 - \phi \cdot \frac{p_d}{p} \cdot \left(1 - \frac{R_l}{R_d}\right)}$$

und die Magnus-Formel

$$p_d = 611{,}213 \cdot \exp\left(\frac{17{,}5043 \cdot T_L}{241{,}2\,°\mathrm{C} + T_L}\right) \mathrm{Pa}$$

sodass

$$\rho_L = 1{,}1755 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Mit den Regeln der Fehlerfortpflanzung lässt sich die Ungenauigkeit der abgeleiteten Dichte wie folgt berechnen:

$$\Delta_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m_1'}\right)^2 \cdot \Delta_{m_1'}^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial m_2'}\right)^2 \cdot \Delta_{m_2'}^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial m_3'}\right)^2 \cdot \Delta_{m_3'}^2}$$

Die Ungenauigkeiten der Dichten von Luft respektive Wasser werden im Vergleich zu den Massenungenauigkeiten als vernachlässigbar klein angenommen, sodass sich nach dem partiellen Ableiten der Bestimmungslgeichung nach den einzelnen Massen folgende Gleichung ergibt

$$\begin{aligned}\Delta_\rho = \Bigg[ &\left(\frac{(m_2' - m_3')(\rho_W - \rho_L)}{(m_1' + m_2' - m_3')^2}\right)^2 \cdot \Delta_{m_1'}^2 + \left(\frac{m_1'(\rho_L - \rho_W)}{(m_1' + m_2' - m_3')^2}\right)^2 \cdot \Delta_{m_2'}^2 \\ &+ \left(\frac{m_1'(\rho_W - \rho_L)}{(m_1' + m_2' - m_3')^2}\right)^2 \cdot \Delta_{m_3'}^2 \Bigg]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Für die resultierenden Ungenauigkeiten folgt:

$$\Delta_{\rho_1} = 3{,}315\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$
$$\Delta_{\rho_2} = 11{,}394\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Das vollständige Ergebnis unter Berücksichtigung der Messabweichungen lautet demzufolge

$$\rho_1 = (2665 \pm 3)\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$
$$\rho_2 = (8901 \pm 11)\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

## 4 Vergleich der Ergebnisse

Die in den Vorbetrachtungen vermutete Zuordnung der Metalle stellt sich beim Vergleich der Dichten mit Literaturangaben als passend heraus.

Die Literaturangaben der Dichte von Aluminium reichen von $2650\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (für Legierungen, *abtech.de*) bis $2700\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (Formelsammlung 2006, Formeln - Tabellen - Wissenswertes 2002, *wolframalpha.com*, *wikipedia.de*). Der im Versuch gewonnene Wert stimmt im Rahmen der Ungenauigkeit *nicht* mit der Dichte von reinem Aluminium überein, passt aber verhätnismäßig gut zur Dichte einiger Aluminium-Legierungen. Eine Oxidation des Aluminiums kann nicht für eine Abweichung nach unten sorgen, da Aluminiumoxid eine höhere Dichte als Aluminium hat. Andererseits ist die sich bildende Oxidschicht typischerweise nur 0,5 µm dick, hätte also höchstwahrscheinlich keine mit einer Analysenwaage messbare Auswirkungen.

Für Kupfer finden sich in der Literatur fast einstimmig Werte von $8960\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (Formelsammlung 2006, Formeln - Tabellen - Wissenswertes 2002, *wolframalpha.com*), nur *wikipedia.de* weicht mit $8920\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ leicht davon ab. Hier stimmt der ermittelte Wert noch weniger mit den Literaturangaben überein - selbst die sehr niedrig angesetzte Dichte von $8920\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ liegt außerhalb der Messungenauigkeit. Eine mögliche Erklärung ist, dass es sich um eine Kupfer-Zink-Legierung (also Messing) handelt, deren Dichte erheblich geringer ist als die von reinem Kupfer. Aufgrund der visuellen Unterschiede zwischen Kupfer und Messing - und der Beobachtung, die eher zu Kupfer passt - müsste es sich allerdings um eine Legierung mit sehr geringem Zink-Anteil handeln.

Interessant ist, dass beide Dichten nach unten von den Literaturangaben abweichen. Es ist zu vermuten, dass ein systematischer Fehler nicht berücksichtigt wurde, der aber nahezu unabhängig von der Masse der untersuchten Probe ist (denn die Abweichung zu den Referenzwerten beträgt für beide Ergebnisse rund

1 %). Demzufolge ist entweder die Ungenauigkeit unterschätzt, da die Referenzwerte außerhalb des durch sie definierten Intervalls liegen, was auf einen systematischen Messfehler schließen ließe, oder aber die Messung kann als genau angesehen werden und die Dichten der untersuchten Massenstücke entsprechen *nicht* den Referenzwerten (was auf eine Beimischung von anderen Metallen schließen lässt).