

Protokoll Grundpraktikum: F0: Auswertung und Präsentation von Messdaten

Sebastian Pfitzner

19. Februar 2013

Durchführung: Sebastian Pfitzner (553983), Jannis Schürmer (552892)

Betreuer: N. Haug

Versuchsdatum: 13.02.2013

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbetrachtungen	1
2	Messwerte	2
2.1	Teil 1	2
2.2	Teil 2	2
3	Auswertung	3
3.1	Teil 1	3
3.2	Teil 2	4

1 Vorbetrachtungen

In diesem Versuch wurde die Erdbeschleunigung g auf zwei verschiedene Arten ermittelt. Der erste Teil beinhaltet mehrfache Messungen der Fallzeit bei konstanter Fallhöhe, während im zweiten Teil die Starthöhe variiert wurde.

2 Messwerte

Um eine statistische Auswertung der Daten zu gewährleisten, wurde im ersten Teil jeweils zehn Messungen durchgeführt, während im zweiten Teil fünfzehn Messungen bei variierten Höhen eine Auswertung durch eine Regressionsanalyse erlauben.

Mit dem Holzmaßstab konnten die Längen bis auf 1 mm genau bestimmt werden, während die Zeiten mit der elektronischen Stoppuhr auf $100 \mu\text{s}$ genau gemessen werden konnten.

h_u beträgt bei allen nachfolgenden Messungen stets 10 cm.

2.1 Teil 1

Da der Versuchsaufbau eine Fallhöhe von $h = h_o - h_u$ festlegt, ergeben sich $h_1 = (25 \pm 0,02)\text{cm}$ und $h_2 = (80 \pm 0,2)\text{cm}$, denn sowohl h_o als auch h_u sind mit einer Ungenauigkeit von $\Delta h_{o/u} = \pm 0,1 \text{ cm}$ behaftet, die sich pythagoreisch zu $\Delta h = \pm 0,14 \text{ cm}$ addieren.

Starthöhe	$h_o = 35 \text{ cm}$ Fallzeit in s	$h_o = 90 \text{ cm}$ Fallzeit in s
1	0,2274	0,4044
2	0,2276	0,4046
3	0,2277	0,4047
4	0,2275	0,4041
5	0,2278	0,4050
6	0,2279	0,4045
7	0,2277	0,4045
8	0,2277	0,4048
9	0,2279	0,4050
10	0,2277	0,4045
Mittelwert	0,2277	0,4046

Für die Standardabweichungen und Konfidenzintervalle ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ s} & \sigma_2 &= 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ s} \\ \bar{\sigma}_1 &= 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ s} & \bar{\sigma}_2 &= 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ s}\end{aligned}$$

2.2 Teil 2

Für diese Messwerte ergibt sich wie bereits im Teil 1 berechnet ein Konfidenzintervall von $\bar{\sigma}_2 = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ für die Zeit und von $\Delta h = \pm 0,14 \text{ cm}$ für die Höhe.

h_o in cm	20	25	30	35	40	45	50	55
t in s	0,143	0,1746	0,2021	0,2275	0,2473	0,2671	0,2858	0,3027
h_o in cm	60	65	70	75	80	85	90	
t in s	0,3195	0,3347	0,3501	0,3638	0,378	0,3911	0,4042	

3 Auswertung

3.1 Teil 1

Aus den gewonnenen Daten lassen sich mit dem bereits bekannten Weg-Zeit-Gesetz die Fallbeschleunigungen ermitteln. Es gilt:

$$s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

$$g = 2 \cdot \frac{h_o - h_u}{t^2} \text{ mit } a = g; v_0 = 0; s_0 = 0; s = h_o - h_u$$

Für die Ungenauigkeit ergibt sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\Delta_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)^2 \cdot \Delta_h^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 \cdot \Delta_t^2}$$

beziehungsweise

$$\Delta_g = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2}\right)^2 \cdot \Delta_s^2 + \left(\frac{-4h}{t^3}\right)^2 \cdot \Delta_t^2}$$

Es ergeben sich folgende Werte:

$$g_1 = (9,64 \pm 0,055) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g_2 = (9,77 \pm 0,018) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die Bildung eines gewogenen Mittels ist nicht möglich, da sich die Werte mit ihren Unsicherheiten nicht überlappen. Diese Tatsache sowie der Vergleich mit dem Literaturwert von $g_L = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (Quelle: PTB), der ebenfalls nicht innerhalb der Unsicherheiten der gemessenen Werte liegt, legt nahe, dass ein nicht berücksichtigter systematischer Fehler vorliegt. Da die ermittelten Erdbeschleunigungen nach unten vom Vergleichswert abweichen, muss die gemessene Zeit zu lang sein (da $g \propto \frac{1}{t^2}$). Dies lässt sich auf den Luftwiderstand und - mit vermutlich stärkerem Einfluss - die Schaltzeiten des Elektromagneten zurückführen. Wenn der den Elektromagneten versorgende Strom abgeschaltet wird, fällt das Magnetfeld nicht instantan

zusammen, sondern mit einer Verzögerung. Deswegen fällt der Ball erst nach der Auslösung der Stoppuhr herunter, was zu einer verlängerten Flugzeit führt. Ein verbesserter Versuchsaufbau wird diese Fehler beheben (z.B. indem Lichtschranken und ein evakuiertes Gefäß verwendet werden), es ist aber auch denkbar, ein Pendel zur Bestimmung von g einzusetzen.

3.2 Teil 2

Für die hier gewonnenen Messwerte bietet sich eine grafische Darstellung und eine Auswertung durch Regressionsanalyse an. Im folgenden ist eine lineare Regression in einer doppelt-logarithmischen-Darstellung sowie eine nichtlineare Regression zusammen mit den Messwerten und deren Unsicherheiten abgebildet. Eine Gewichtung ist hierbei nicht vonnöten, da für jede Höhe und jede Zeit die gleiche Ungenauigkeit gilt. Die folgenden drei Diagramme zeigen eben jene Fits sowie die Residuen. Auffällig ist, dass der vierte Wert in jeder der drei Regressionsanalysen stärker vom Modell abweicht als alle anderen. Er könnte demzufolge zwar als grober Messfehler "aussortiert" werden, allerdings ist seine Abweichung nicht sehr gravierend.

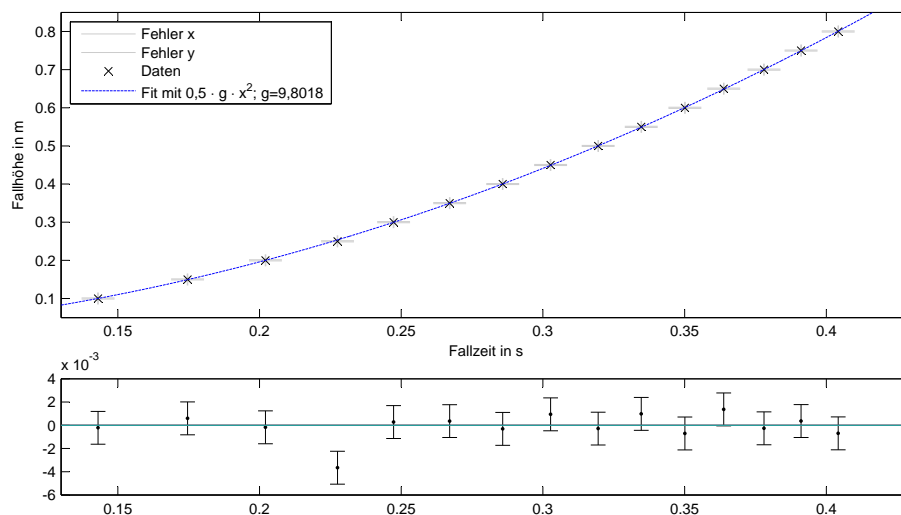


Abb. 1: nicht-linearer Fit mit $h(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

Dieser erste Fit passt gut zu den Daten, denn die Residuen zeigen keine auffällige Verteilung, sondern erscheinen normalverteilt. Es gelten $R^2 \cong 1$, für die Summe der Fehlerquadrate $SSE = 1,9 \cdot 10^{-5}$ sowie für die Wurzel aus mittleren

quadratischen Abweichung $RMSE = 1,2 \cdot 10^{-3}$. All diese Werte deuten auf eine sehr gute Beschreibung der Daten durch das Modell hin.

Für die Erdbeschleunigung ergibt sich (bei einer Unsicherheit von zwei Standardabweichungen, sodass also der wahre Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% im angegebenen Intervall liegt):

$$g_3 = (9,802 \pm 0,013) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

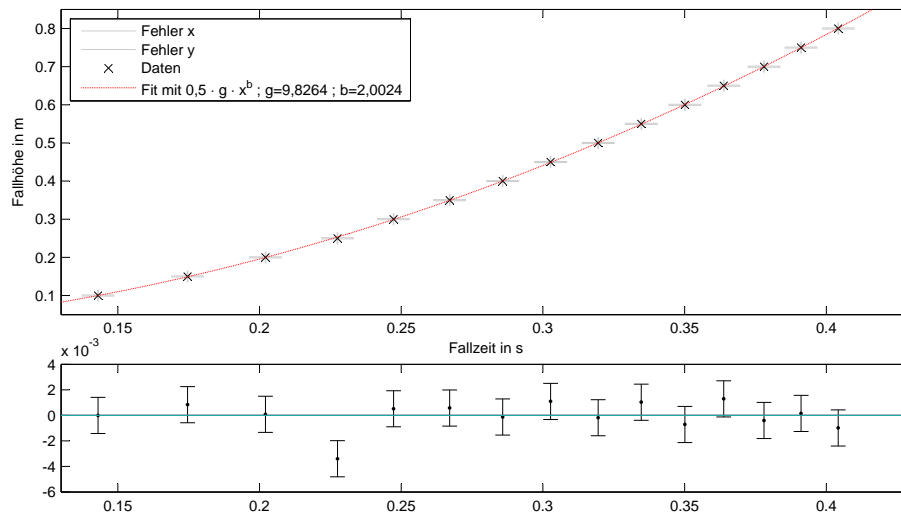


Abb. 2: nicht-linearer Fit mit $h(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^b$

Für diesen Fit wurde ein weiterer freier Parameter angegeben, um beurteilen zu können, ob die erwartete quadratische Abhängigkeit tatsächlich vorhanden ist. Es ergeben sich

$$b = 2,002 \pm 0,008$$

$$g_4 = (9,826 \pm 0,085) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

bei $R^2 \cong 1$, $SSE = 1,8 \cdot 10^{-5}$ und $RMSE = 1,2 \cdot 10^{-3}$. Demzufolge scheint die quadratische Abhängigkeit in der Tat gegeben. Die Residuen zeigen wie auch in Abbildung 1 eine gleichmäßige Verteilung um den Fit, sodass auch hier von einer Übereinstimmung zwischen Modell und Daten ausgegangen werden kann.

In Abbildung 3 ist der durch eine doppelt-logarithmische Skala linearisierte Plot der Messdaten zu finden. Die Fit-Funktion ist durch Logarithmieren beider Seiten der Gleichung $h(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ zu finden. Aus dem Parameter b lässt sich demzufolge

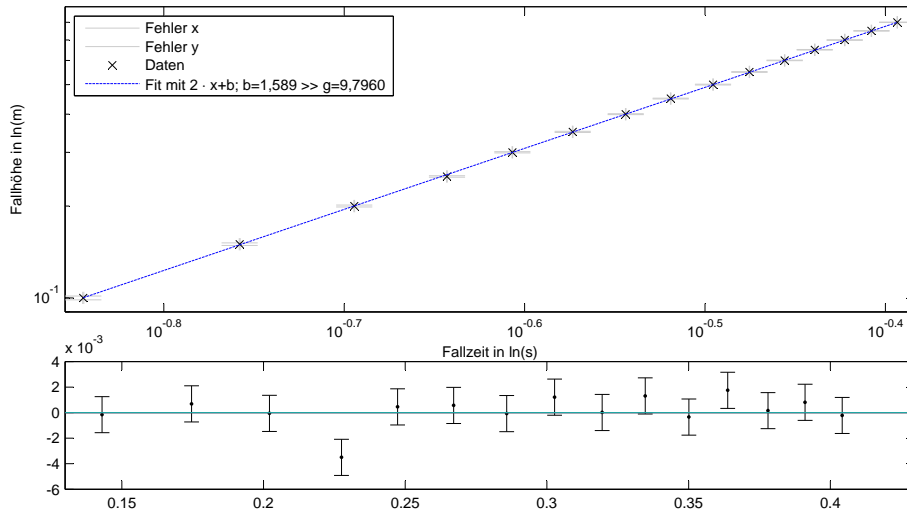


Abb. 3: linearer Fit mit $\ln[h(t)] = 2 \cdot \ln(t) + b$

die Erdbeschleunigung wie folgt errechnen: $g = e^b \cdot 2$. Demzufolge gilt (wiederum bei einer Ungenauigkeit von zwei Standardabweichungen)

$$b = 1,589 \pm 0,002$$

$$g_5 = (9,796 \pm 0,018) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Es gilt $R^2 \cong 1$, $SSE = 2,4 \cdot 10^{-4}$ und $RMSE = 4,2 \cdot 10^{-3}$. Auffällig ist, dass die Summe der Fehlerquadrate um eine Größenordnung über der der anderen beiden Regressionen liegt. Nach Analyse der Residuen lässt sich erkennen, dass der wahrscheinliche Grund hierfür die etwas schlechtere Annäherung der Werte für lange Fallzeiten bzw. große Fallhöhen ist. Der viertletzte Wert weicht über seine Ungenauigkeit hinaus von dem Modell ab, was bei den anderen beiden Fits nicht der Fall war.

Das gewichtete Mittel von $g_{3...5}$ beträgt $\bar{g} = (9,800 \pm 0,010) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, was sehr gut mit dem Referenzwert von $g_L = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ übereinstimmt. Das verwendete Messverfahren erlaubt also eine genaue Bestimmung der Erdbeschleunigung bis auf eine Nachkommastelle, was darauf schließen lässt, dass keine unberücksichtigten stark einfließenden systematischen Fehler mehr vorliegen.

Es bieten prinzipiell alle Fits ein gutes Ergebnis, allerdings liefert die nicht-lineare Regression mit nur einem freien Parameter und festgelegter quadratischer Abhängigkeit zwischen Weg und Zeit das Ergebnis mit der geringsten Abweichung, das außerdem noch am besten mit dem Referenzwert übereinstimmt.