Protokoll Grundpraktikum II: E4 Wechselstromwiderstände

Sebastian Pfitzner

21. November 2013

Durchführung: Anna Andrle (550727), Sebastian Pfitzner (553983)
Arbeitsplatz: Fensterplatz, von der Tür aus links
Betreuer: Dr. U. Müller, R. Schurbert
Versuchsdatum: 13.11.2013

Abstract

In diesem Versuch geht es um die Untersuchung der Eigenschaften von Wechselstromwiderständen und Schwingkreisen. Hierzu wird in verschiedenen Schaltungen die Quellspannung und die Spannung über einem bekannten Widerstand in Abhängigkeit der Frequenz der sinusförmigen Wechselspannung gemessen. Hiermit lassen sich die theoretischen Überlegungen zur Frequenzabhängigkeit von Spulen und Kondensatoren überprüfen. Außerdem lassen sich daraus die Kenngrößen den Wechselstromwiderstände bestimmen, also Kapazität, Induktivität bzw. ohmscher Widerstand der Spule. Auch das Verhalten eines Schwingkreises aus Widerstand, Spule und Kondensator wird überprüft.

Inhaltsverzeichnis

1 Messwerte und Auswertung

Zunächst wird die korrekte Funktionsweise der Messanordnung bestimmt, in dem der Frequenzgenerator direkt an den Oszillograph angeschlossen wird, so dass die tatsächliche Frequenz überprüft werden konnte.

1.1 Untersuchung des Kondensators

Für diesen Teil des Versuchs wird eine Reihenschaltung aus Kondensator und bekanntem Widerstand ($R_p = (10 \pm 0{,}03)\Omega$[1]) aufgebaut, wobei mit dem Oszillograph die Quellspannung sowie die Spannung über dem Widerstand gemessen werden kann. Aus den Beziehungen

$$R_C = \frac{U_G}{I_C} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$
$$I_C = \frac{U_R}{R_p}$$

ergibt sich folgende Gleichung:

$$U_R = 2\pi R_p C \cdot f U_G \tag{1}$$

Hierbei ist U_G die Generatorspannung, f die Frequenz von U_G, C die zu bestimmende Kapazität des Kondensators und U_R die Spannung über dem Widerstand. Dieser Zusammenhang ermöglicht einen linearen Fit der gewonnenen Daten, wobei $f \cdot U_G$ als Argument der Funktion dient, denn der Widerstand ist frequenzabhängig und die Generatorspannung ist umgekehrt dazu lastabhängig. Demzufolge sollte diese Abhängigkeit in linearer Näherung wegfallen, wenn das Produkt verwendet wird. Aus dem Anstieg a_1 der so gewonnenen Funktion lässt sich die Kapazität offensichtlich wie folgt berechnen:

$$C = \frac{a_1}{2\pi R_p} \tag{2}$$

Aus der gaußschen Fehlerfortpflanzung ergibt sich folgende Unsicherheit der Kapazität:

$$\Delta C = \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi R_p}\right)^2 \cdot \Delta a_1^2 + \left(-\frac{a_1}{2\pi R_p^2}\right)^2 \cdot \Delta R_p^2} \tag{3}$$

Tabelle 1 stellt die Messwerte dar, die zur Bestimmung der Kapazität benutzt werden. Sie werden in Abbildung 1 samt einem linearen Fit (mit der Matlab-Routine `chisqlinfit`[2]) dargestellt. Die Unsicherheiten von jeder mit dem Oszillographen gemessenen Spannung ergibt sich aus einem Ablesefehler von ca.

[1] siehe blaues Skript für die Unsicherheit eines Dekadenwiderstands
[2] zu finden unter http://people.physik.hu-berlin.de/~pfitzseb/matlab.html

f [kHz]	1,00	2,00	3,00	4,07	5,01	6,09	7,09	8,10	9,08	10,03	15,05
U_G [V]	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5	5,4	5,4	5,3	5,3	5,1	4,9
$2 \cdot U_R$ [V]	0,065	0,130	0,190	0,260	0,320	0,380	0,440	0,504	0,560	0,610	0,825

Tab. 1: Abhängigkeit der Spannung über dem Widerstand und der Generatorspannung von der Frequenz bei einer RC-Schaltung

0,1 Skalenteilen sowie einem demgegenüber vernachlässigbar kleinem Messgerätefehler und wird so auch in der restlichen Auswertung verwendet. Aus dem so

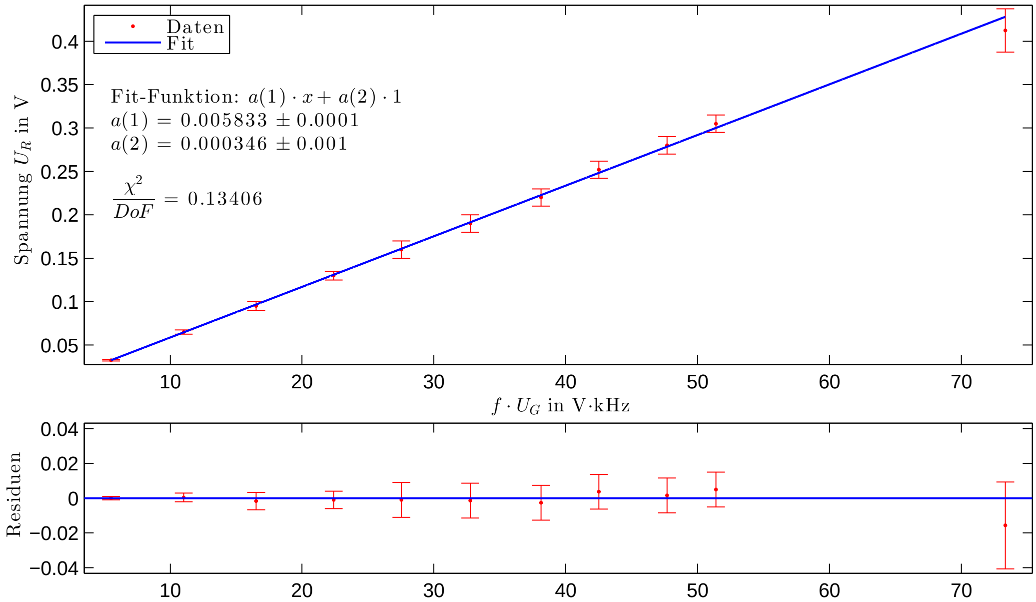

Abb. 1: linearer Fit der Spannung über dem Widerstand R_p in Abhängigkeit vom Produkt der Generatorfrequenz- und Spannung bei eingesetztem Kondensator

gewonnenen Parameter a_1 lässt sich nun mithilfe der Formeln (2) und (3) nun die Kapazität und dessen Unsicherheit berechnen:

$$C_m = (93 \pm 2)\text{nF}$$

1.2 Untersuchung der Spule

Hier soll nun die Induktivität und der ohmsche Widerstand der Spule bestimmt werden. Dazu wird, analog zur Bestimmung der Kapazität des Kondensators, die

Generatorspannung und -frequenz sowie der Spannungsabfall über dem bekannten Widerstand R_p gemessen. Die Beziehung

$$R_{gesamt}^2 = \frac{U_G^2}{I^2} = \frac{U_G^2 \cdot R_p^2}{U_R^2} = (R_L + R_p)^2 + 4\pi^2 f^2 L^2 \tag{4}$$

erlaubt nun wiederum einen linearen Fit, wobei das Verhältnis zwischen Quadrat Generatorspannung U_G und Quadrat des Stroms I in Abhängigkeit vom Quadrat der Frequenz f geplottet wird. Aus dem Anstieg b_1 der gefitteten Geraden lässt sich die Induktivität L ableiten und aus dem Schnittpunkt mit der y-Achse (b_2) der ohmschen Widerstand R_L der Spule bestimmen. Für die Unsicherheit des y-Wertes (also $y = \frac{U_G^2 \cdot R_p^2}{U_R^2}$) lässt sich folgende Größtfehlerabschätzung durchführen (das ist nötig, weil die Größen korreliert sind, aber der Korrelationskoeffizient unbekannt ist):

$$\Delta y = \left| 2\frac{U_G \cdot R_p^2}{U_R^2} \cdot \Delta U_G \right| + \left| 2\frac{U_G^2 \cdot R_p}{U_R^2} \cdot \Delta R_p \right| + \left| -2\frac{U_G^2 \cdot R_p^2}{U_R^3} \cdot \Delta U_R \right| \tag{5}$$

Die in Tabelle 2 aufgelisteten Messdaten werden im Diagramm 2 dargestellt und wie oben linear gefittet.

f [Hz]	10,831	20,155	31,113	41,733	50,881	60,909	70,395	80,7	91,811
$2 \cdot U_G$ [V]	8	8,5	8,75	9	9,5	9,5	10	10	10,5
$2 \cdot U_R$ [V]	0,5	0,48	0,46	0,44	0,42	0,38	0,36	0,32	0,3
f [Hz]	100,9	199,65	309,8	407,97	510,07				
$2 \cdot U_G$	10,5	10,5	10,75	11	11				
$2 \cdot U_R$	0,29	0,16	0,11	0,085	0,07				

Tab. 2: Messwerte für Generatorspannung und Spannung über dem Widerstand R_p in Abhängigkeit von der Generatorfrequenz

Durch folgende offensichtliche Zusammenhänge errechnen sich nun die Induktivität und der ohmsche Widerstand der Spule:

$$L = \frac{\sqrt{b_2}}{2\pi} \tag{6}$$

$$\Delta L = \frac{1}{2\sqrt{2b_1}\pi} \Delta b_1 \tag{7}$$

$$R_L = \sqrt{b_2} - R_p \tag{8}$$

$$\Delta R_L = \frac{1}{2\sqrt{b_2}} \Delta b_2 \tag{9}$$

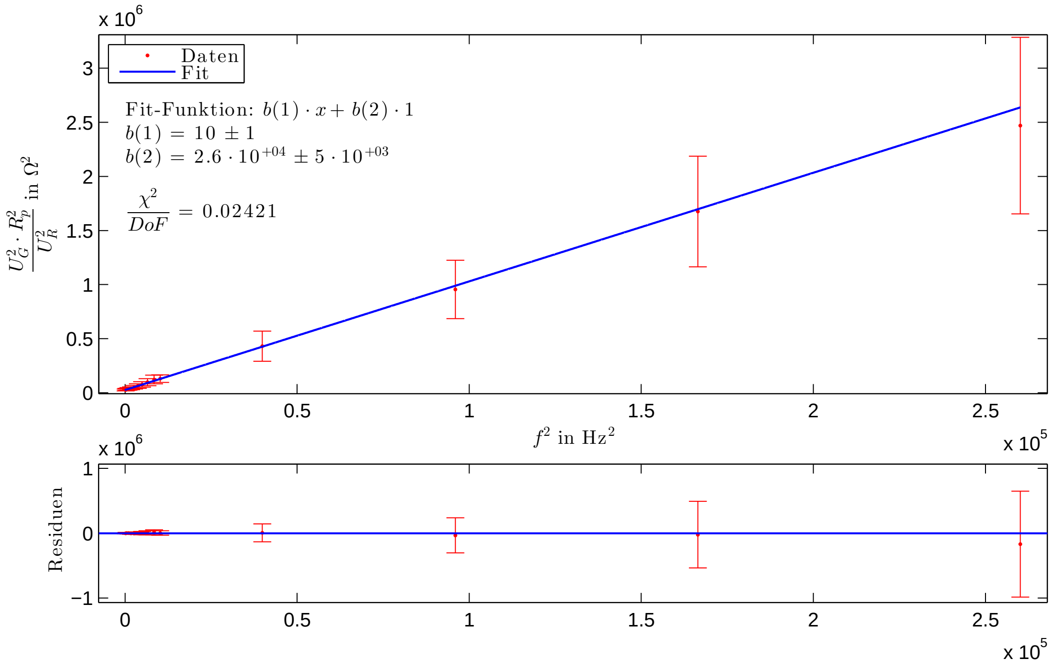

Abb. 2: Abhängigkeit des Verhältnisses der Quadrate aus Strom und Generatorspannung in Abhängigkeit vom Quadrat der Frequenz bei eingesetzter Spule

Daraus ergeben sich folgende Ergebnisse:

$$L_m = (0{,}50 \pm 0{,}03)\mathrm{H}$$
$$R_L^m = (150 \pm 15)\Omega$$

1.3 Untersuchung des Reihenschwingkreises

Nun wird die Schaltung so verändert, dass ein LRC-Glied entsteht, also eine Reihenschaltung von Widerstand, Spule und Kondensator.

Aufgrund der Frequenzabhängigkeit von den Scheinwiderständen von Kondensator und Spule existiert eine Resonanzfrequenz, bei der der Widerstand und die Phasenverschiebung von Strom und Spannung minimal und der Strom maximal wird.

Mit dem Oszillographen wird nun die Spannung über dem bekannten ohmschen Widerstand sowie die Quellspannung gemessen. Die Resonanzfrequenz lässt sich am besten über die Phasenverschiebung finden, insbesondere da der Oszillograph es erlaubt, die beiden gemessenen Spannungen gegeneinander aufzutragen. Im Resonanzfall ist eine Gerade zu beobachten, sonst eine Ellipse mit frequenzabhängiger kurzer Halbachse.

In drei Messungen wurde die Resonanzfrequenz auf $f_R^m = (742 \pm 2)\mathrm{Hz}$ bestimmt. Die Unsicherheit wurde hier auf 2 Hz abgeschätzt, da die Frequenz am Frequenzgenerator sich nicht präziser einstellen lässt und weiterhin die Strichbreite auf der Anzeige des Oszillographen keine genauere Bestimmung des Resonanzfalls erlaubt. In Tabelle 3 ist der Strom in Abhängigkeit von der Frequenz eingetragen, woraus sich dann das Diagramm 3 ergibt.

Die Unsicherheit des Stroms ergibt sich aus der gaußschen Fehlerfortpflanzung wie folgt:

$$\Delta\frac{U_R}{R_p} = \sqrt{\left(\frac{1}{R_p}\right)^2 \cdot \Delta R_p^2 + \left(-\frac{U_R}{R_p}\right)^2 \cdot \Delta U_R^2}$$

Der in diesem Diagramm dargestellte nichtlineare Fit mit den Parametern $c_1 = U_G$, $c_2 = C$, $c_3 = L$ und $c_4 = R$ wurde mit `chisqfit`[3]) für folgende Funktion, wobei von einer konstanten Generatorspannung ausgegangen wird, da sonst ein Fit in zwei Variablen nötig wäre:

$$I(f) = \frac{U_G}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi \cdot L \cdot f - \frac{1}{2\pi \cdot C \cdot f}\right)^2}} \tag{10}$$

f [Hz]	107,83	237,04	301,82	416,84	527,42	623,1	675,34	694,08	723,8
$2 \cdot U_G$	11	11	11	11	11	11	10,5	10	9,5
$2 \cdot U_R$	0,0075	0,018	0,024	0,04	0,07	0,13	0,21	0,25	0,32
f [Hz]	740,13	770,3	784,25	828,83	910,66	990,74	1077	1134,5	1207,5
$2 \cdot U_G$	9	9,5	10	10,5	11	11	11	11	11
$2 \cdot U_R$	0,33	0,29	0,26	0,18	0,11	0,08	0,065	0,055	0,05

Tab. 3: Messwerte für die Spitzenspannungen über dem Generator und dem Widerstand R_p in Abhängigkeit von der Frequenz

Die aus dem Fit gewonnenen Werte für die Kapazität und die Induktivität stimmen im Rahmen ihrer Genauigkeit gut mit den oben gewonnenen Werten überein:

$$L_f = (0{,}50 \pm 0{,}01)\mathrm{H}$$
$$C_f = (93 \pm 2)\mathrm{nF}$$

Allerdings ist der Wert für den gesamten ohmschen Widerstand im Schwingkreis von $R_L^f = (350 \pm 30)\Omega$ deutlich zu hoch, um mit den ohmschen Widerständen der Spule und R_p erklärt werden zu können.

[3]zu finden unter `http://people.physik.hu-berlin.de/~pfitzseb/matlab.html`

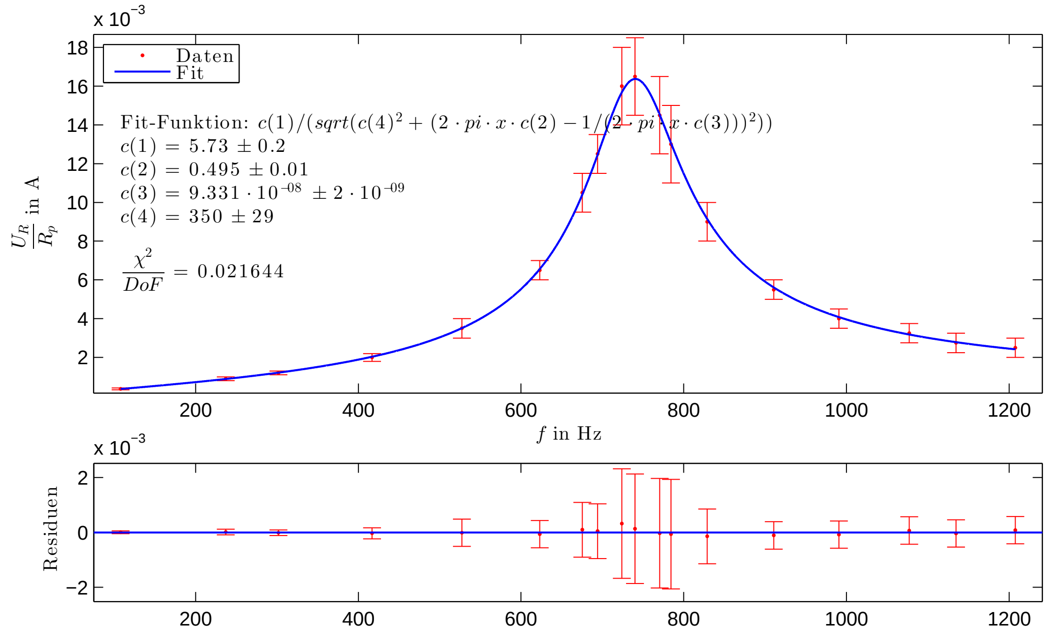

Abb. 3: Fit für den Strom im Schwingkreis in Abhängigkeit von der Generatorfrequenz

Weiterhin lässt sich der Widerstand der Spule aus der Spannungsüberhöhung berechnen, denn im Resonanzfall gelten folgende Beziehungen:

$$\rho = \frac{U_L}{U_G} = \frac{U_C}{U_G} \tag{11}$$

$$\rho = \frac{2\pi \cdot f \cdot L}{R_g} = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C \cdot R_g} \tag{12}$$

Hier ist R_G der Gesamtwiderstand im Schaltkreis, also $R_p + R_L$; also gilt $R_L = R_G - R_p$. U_L ist die Spannungsüberhöhung der Spule, U_C die des Kondensators. Daraus ergeben sich folgende Formeln zur Berechnung des Gesamtwiderstands sowie seiner Unsicherheit im Schaltkreis:

$$R_g^L = \frac{2\pi \cdot f \cdot L \cdot U_G}{U_L}$$

$$\Delta R_g^L = \Bigg[\left(\frac{2\pi \cdot L \cdot U_G}{U_L}\right)^2 \cdot \Delta f^2 + \left(\frac{2\pi \cdot f \cdot U_G}{U_L}\right)^2 \cdot \Delta L^2 + \left(\frac{2\pi \cdot f \cdot L}{U_L}\right)^2 \cdot \Delta U_G^2 + \left(\frac{-2\pi \cdot f \cdot L \cdot U_G}{U_L^2}\right)^2 \cdot \Delta U_L^2 \Bigg]^{\frac{1}{2}}$$

$$R_g^C = \frac{U_G}{2\pi \cdot f \cdot C \cdot U_C}$$

$$\Delta R_g^C = \left[\left(-\frac{U_G}{2\pi \cdot f^2 \cdot C \cdot U_C} \right)^2 \cdot \Delta f^2 + \left(-\frac{U_G}{2\pi \cdot f \cdot C^2 \cdot U_C} \right)^2 \cdot \Delta C^2 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C \cdot U_C} \right)^2 \cdot \Delta U_G^2 + \left(-\frac{U_G}{2\pi \cdot f \cdot C \cdot U_C^2} \right)^2 \cdot \Delta U_C^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Mit dem Digitalmultimeter wurden im Resonanzfall bei $f = 742\,\mathrm{Hz}$ Werte von

$$U_G = (6{,}52 \pm 0{,}07)\mathrm{V}$$
$$U_L = (53{,}8 \pm 0{,}54)\mathrm{V}$$
$$U_C = (53{,}3 \pm 0{,}54)\mathrm{V}$$

gemessen. Aus diesen Gleichungen und Messwerten folgen dann zwei weitere Ergebnisse für den ohmschen Widerstand der Spule:

$$R_L^L = (272 \pm 9)\Omega$$
$$R_L^C = (272 \pm 9)\Omega$$

Auch diese Werte sind deutlich höher als die bislang gewonnenen. Eine mögliche Erklärung dafür wird in der Ergebnisdiskussion geliefert.

Die Resonanzfrequenz lässt sich auch aus den bereits gewonnenen Werten für C und L nach der Thomson'schen Schwingungsgleichung (Unsicherheit aus gaußscher Fehlerfortpflanzung) berechnen:

$$f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{13}$$
$$\Delta f_R = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\left(-\frac{C}{2(LC)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \cdot \Delta L^2 + \left(-\frac{L}{2(LC)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \cdot \Delta C^2} \tag{14}$$

Daraus ergibt sich mit den obengenannten Werten folgendes Ergebnis:

$$f_R^r = (735 \pm 25)\mathrm{Hz}$$

1.4 Vergleichswerte

Mit dem Digitalmultimeter wurden Vergleichswerte für die Kapazität des Kondensators sowie den ohmschen Widerstand der Spule bestimmt. Ein Vergleichswert für die Induktivität wurde vom Versuchsleiter vor dem Versuch gegeben. Bei einer Unsicherheit von 1% des Messwertes und einem Digitalisierungsfehler von 1 Digit ergeben sich folgende Werte:

$$C_V = (94 \pm 1)\mathrm{nF}$$
$$L_V = (0{,}5 \pm 0{,}05)\mathrm{H}$$
$$R_L^V = (150 \pm 1{,}6)\Omega$$

2 Ergebnisdiskussion

Alle gewonnenen Werte für die Kapazität des Kondensators sowie die Induktivität der Spule stimmen im Rahmen ihrer Unsicherheiten überein. Aus C_V, C_f und C_m ergibt sich eine gewichtetes Mittel (dessen Berechnung aufgrund der überlappenden Fehlerintervalle zulässig ist) von

$$C = (93{,}7 \pm 0{,}8)\mathrm{nF}$$

Die gleiche Berechnung ist auch für die Induktivität der Spule zulässig, was zu folgendem gewichteten mittel führt:

$$L = (0{,}5 \pm 0{,}01)\mathrm{H}$$

Für den ohmschen Widerstand der Spule ist dies allerdings - wie oben schon angedeutet - nicht der Fall. Die für ihn gewonnenen Werte unterscheiden sich drastisch, wobei der durch den linearen Fit (Abbildung 2) dem Vergleichswert am ehesten entspricht. Die Diskrepanz zwischen diesem Wert und dem im Resonanzfall des Schwingkreises gewonnenen Widerständen lässt sich möglicherweise durch die hohe Last im Resonanzfall erklären. Der Strom wird dann maximal, und ist nur durch den Widerstand R_p sowie den Innenwiderstand der Spannungsquelle begrenzt. Allerdings verändert sich der Stromfluss offensichtlich sinusförmig, so dass sich die Last ebenso verändert. Deshalb ist es gut möglich, dass die Spannungsquelle eine weit niedrigere Spannung liefert als vom Digitalmultimeter angezeigt. Tatsächlich ist bei der späteren Messung des Stroms und der Generatorspannung (siehe Tabelle 3) im nahen Resonanzbereich bei 740 Hz nur eine Spitzenspannung von $U_G = 4{,}5\,\mathrm{V}$ gemessen worden. Mit diesem Wert reduziert sich der so gefundene ohmsche Widerstand der Spule auf $R_L^* = (195 \pm 6)\Omega$.

Allerdings ist auch dieser Wert noch deutlich zu groß, ebenso wie der aus dem Fit in Grafik 3 gewonnene. Eine mögliche Erklärung dafür sind Parasitärkapazitäten in der Spule sowie zu einem vermutlich viel höherem Ausmaß Wirbelstromverluste durch die im massiven Eisenkern der Spule induzierten Ströme. Dort wird natürlich Energie umgesetzt, was sich in einem höheren Widerstand äußert, der allerdings als ohmscher Widerstand in Erscheinung tritt, denn er wird in den Formeln sonst nirgendwo berücksichtigt. Problematisch ist dabei jedoch der große Unterschied des aus dem nichtlinearen Fit gewonnenen ohmschen Widerstands gegenüber dem aus der Spannungsüberhöhung gewonnenen Wert. Diese Diskrepanz lässt sich zu einem gewissen Maß durch die im Fit nicht berücksichtigte Lastabhängigkeit der Generatorspannung erklären.

Der Unterschied in den Spannungsüberhöhungen von Kondensator bzw. Spule lässt sich durch den Innenwiderstand der Spule erklären, denn dieser vergrößert den Scheinwiderstand der Spule. Die von einer idealen Spule mit gleicher Induktivität hervorgerufene Spannungsüberhöhung würde genau der des Kondensators entsprechen - deren Messung ist aber natürlich nicht möglich.

Die rechnerische Bestimmung der Resonanzfrequenz des Schwingkreises liefert einen Wert, der im Rahmen seiner Ungenauigkeit mit der Frequenz übereinstimmt, bei der die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung minimal wird. Das gewichtete Mittel liefert hier aufgrund der großen Unsicherheit des berechneten Wertes folgendes Ergebnis:

$$f_R = (742 \pm 2)\mathrm{Hz}$$

Die χ^2/DoF-Werte der Fits sind zwar unerwartet klein, da der Erwartungswert der χ^2-Verteilung der Anzahl der Freiheitsgrade entspricht, aber die daraus eigentlich zu ziehende Folgerung, dass entweder die Unsicherheiten der Messwerte zu groß eingeschätzt wurden oder aber das Modell zu viele Parameter besitzt erscheinen nicht gerechtfertigt - insbesondere bei den linearen Regressionen.