

# Protokoll: Grundpraktikum II E3 - Transformator

Sebastian Pfitzner

17. Januar 2014

**Durchführung:** Anna Andrle (550727), Sebastian Pfitzner (553983)

**Arbeitsplatz:** Platz 2

**Betreuer:** Stefan Weidemann

**Versuchsdatum:** 07.01.2014

## Abstract

Transformatoren werden hauptsächlich zur Erhöhung oder Verringerung von Wechselspannungen (wichtig insbesondere für die verlustarme Übertragung von Strom durch Hoch- und Höchstspannung) mithilfe des physikalischen Prinzips der Induktion eingesetzt. In diesem Experiment werden verschiedene Kenngrößen (Übertragungsverhältnis, Leerlaufstrom) eines Transformators mit geschichtetem Eisenkern bestimmt und das Verhalten von Wirkungsgrad, Änderung des Primärstroms und Phasenverschiebung (zwischen Spannung und Strom im Primärkreis) bei verschiedenen Lasten am Sekundärkreis untersucht.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Messwerte und Auswertung</b>	<b>2</b>
1.1	Eigenschaften des unbelasteten Transformators . . . . .	2
1.1.1	Übersetzungsverhältnis . . . . .	2
1.1.2	Leerlaufleistung und -spannung . . . . .	3
1.2	Belasteter Transformator . . . . .	4
1.2.1	Wirkungsgrad . . . . .	5
1.2.2	Primärstrom . . . . .	6
1.2.3	Phasenverschiebung . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Ergebnisdiskussion</b>	<b>9</b>

# 1 Messwerte und Auswertung

Alle im Folgenden aufgeführten Formeln zur Fehlerabschätzung (aufgrund der meist korrelierten Messgrößen wird eine Größtfehlerabschätzung verwendet) ergeben sich aus [1, S. 35f].

Entsprechend der Angaben auf den Messgeräten ergeben sich die Unsicherheiten für die Stromstärke, Spannung bzw. Leistung (AC-Eichung) wie folgt:

$\Delta U = 0,01 \cdot U + 2 \text{ Digits}$	Digitalmultimeter ohne True-RMS
$\Delta I = 0,015 \cdot I + 2 \text{ Digits}$	Digitalmultimeter ohne True-RMS
$\Delta I = 0,02 \cdot I + 5 \text{ Digits}$	True-RMS, für $40 \text{ mA} < I < 400 \text{ mA}$
$\Delta I = 0,025 \cdot I + 5 \text{ Digits}$	True-RMS, für $I > 400 \text{ mA}$
$\Delta P = 0,02 \cdot P + 1 \text{ Digit}$	Wattmeter

## 1.1 Eigenschaften des unbelasteten Transformators

### 1.1.1 Übersetzungsverhältnis

Vorerst soll das Übersetzungsverhältnis  $T_U$  des vorliegenden Transformators bestimmt werden, welches sich aus dem Verhältnis der Primärspannung  $U_p$  und Sekundärspannung  $U_s$  ergibt. Dazu werden elf Messwerte beider Wechselspannungen mit einem auf AC geeichten Digitalmultimeter aufgenommen (siehe Diagramm 1).

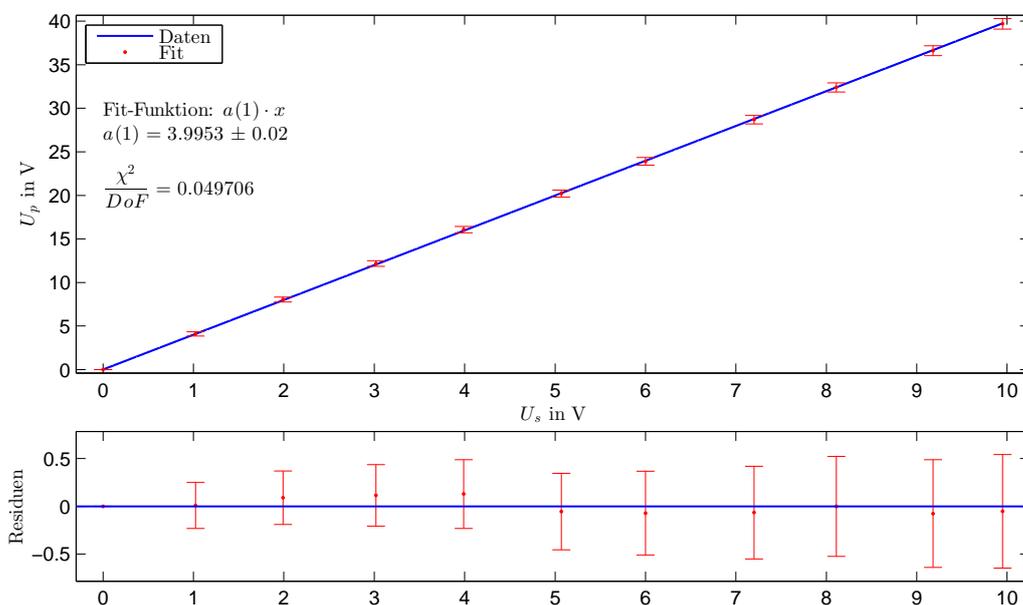


Abb. 1: Linearer Fit der Messwerte für die Sekundär- und die Primärspannung

Das Übersetzungsverhältnis des Transformators ergibt sich nun aus dem Anstieg der linearen Funktion. Zur Bestimmung desselben wird ein linearer Fit (dargestellt in Abbildung 1) durchgeführt, wobei  $U_p$  auf der y-Achse aufgetragen wird. Dieses Vorgehen liefert eine bessere Fehlerabschätzung, denn der Fit bezieht prinzipbedingt nur die Unsicherheiten der y-Werte mit ein. Diese sind bei der gewählten Darstellung größer als bei  $U_s$  auf der y-Achse, denn  $\Delta U_p > \Delta U_s$ .

Aus der Überlegung, dass ohne Primärspannung auch keine Sekundärspannung vorliegen kann, ergibt sich eine Unsicherheit von 0 für den ersten Messwert sowie eine Fitfunktion  $U_p(U_s) = a_1 \cdot U_s$ .

Das gesuchte Übersetzungsverhältnis ergibt sich aus dem Inversen des Fitparameters, die Unsicherheit aus der gaußschen Fehlerfortpflanzung [1]:

$$T_U = \frac{1}{a_1} = \frac{U_s}{U_p} \quad (1)$$

$$\Delta T_U = \frac{1}{a_1^2} \cdot \Delta a_1 \quad (2)$$

Daraus ergibt sich folgendes Ergebnis für das Übersetzungsverhältnis

$$T_U = \frac{U_s}{U_p} = (0,250 \pm 0,001)$$

Die Prüfgröße  $\chi^2/DoF = 0,05$  des linearen Fits liegt deutlich unter dem Erwartungswert von 1. Dies weist auf zu groß abgeschätzte Fehler hin - allerdings ist es mit vertretbarem Aufwand nicht möglich, die Messgerätefehler präziser zu bestimmen als die Herstellerangaben besagen.

Um mögliche systematische Fehler ausschließen zu können, wird ebenfalls ein Fit mit der Funktion  $U_p(U_s) = a \cdot U_s + b$  und ohne den Messwert bei  $I_{p/s} = 0$  durchgeführt. Dieser liefert einen nur unwesentlich besseren  $\chi^2/DoF$ -Wert und für den Offset  $b = (0,08 \pm 0,2)$  V. Dieser Wert ist drei Größenordnungen kleiner als die Messwerte und kann deshalb vernachlässigt werden, sodass die oben getätigte Annahme (unabhängig vom physikalischen Modell) bestätigt wird.

### 1.1.2 Leerlaufleistung und -spannung

Weiterhin wird der Primärstrom und die Primärleistung beim unbelasteten Transformator gemessen, wofür ein Ampèremeter sowie ein Wattmeter verwendet wird.

In Tabelle 1 sind die gemessenen Werte für die Primärleistung und den Primärstrom sowie deren Unsicherheiten angegeben. Aufgrund der einander überlappenden Fehlerintervalle lassen sich mit den Unsicherheiten gewichtete Mittelwerte bestimmen, die in der letzten Zeile angegeben sind. Die Primärspannung beträgt während der drei Messungen rund 43 V.

	$P_p$ [W]	$\Delta P_p$ [W]	$I_p$ [A]	$\Delta I_p$ [A]
	1,93	0,04	0,386	0,014
	1,92	0,04	0,386	0,014
	1,94	0,04	0,389	0,014
Mittel	1,93	0,02	0,387	0,009

**Tab. 1:** Messwerte für Primärstrom und -leistung beim unbelasteten Transformator

Bei einem idealen Transformator wäre im Leerlauf eine Primärleistung von 0 zu erwarten, da Strom und Spannung genau um  $\pi/2$  phasenverschoben sind. Offensichtlich trifft dies im hier betrachteten realen Trafo nicht zu, worauf auch in der weiteren Auswertung noch eingegangen wird.

## 1.2 Belasteter Transformator

Für die Untersuchung des Verhaltens des belasteten Transformators wurde in den Sekundärkreis ein Potentiometer eingefügt, mit dem sich die Last variieren lässt.

Es verändert sich die Situation im Vergleich zum unbelasteten Transformator wie folgt: Aufgrund des nun endlichen ohmschen Widerstands im Sekundärkreis erzeugt die induzierte Spannung  $U_s$  einen Sekundärstrom  $I_s$ , welcher aber wiederum einen magnetischen Fluss induziert, der nun (laut der lenzschen Regel) der Ursache, als dem von der Primärspule induzierten Fluss, entgegen gerichtet ist. In der Primärspule wird nun also eine geringere Spannung  $U_p^{ind}$  als im unbelasteten Fall induziert, da der Fluss geringer ist. Diese muss aber laut dem Maschensatz gleich dem Negativen der Quellspannung sein, sodass zur Kompensation ein Wirkstrom  $I_p^*$  phasengleich zur Primärspannung fließen muss, die den magnetischen Fluss wieder auf seinen ursprünglichen Wert anhebt ( $\Rightarrow \phi = \text{const}$ ). Der messbare Effektivwert des Stroms  $I_p^{**}$  ergibt sich aus der Addition der beiden Ströme. Dabei muss beachtet werden, dass  $I_p^*$  und  $I_p$  um  $\pi/2$  gegeneinander phasenverschoben sind.  $I_p^{**}$  ergibt sich demnach zu

$$|I_p^{**}| = \sqrt{I_p^2 + I_p^{*2}} \quad (3)$$

Gemessen werden nun die Effektivwerte der Primärspannung ( $U_p$ ) und des Primärstroms ( $I_p^{**}$ ), die Primärleistung  $P_p$  sowie die Sekundärspannung  $U_s$  und der Sekundärstrom  $I_s$ . Aus diesen Messwerten lässt sich nun die Sekundärleistung  $P_s$ , der Wirkungsgrad  $\eta$  und auch die Phasenverschiebung  $\varphi$  im Primärkreis [2, S. 10f].

### 1.2.1 Wirkungsgrad

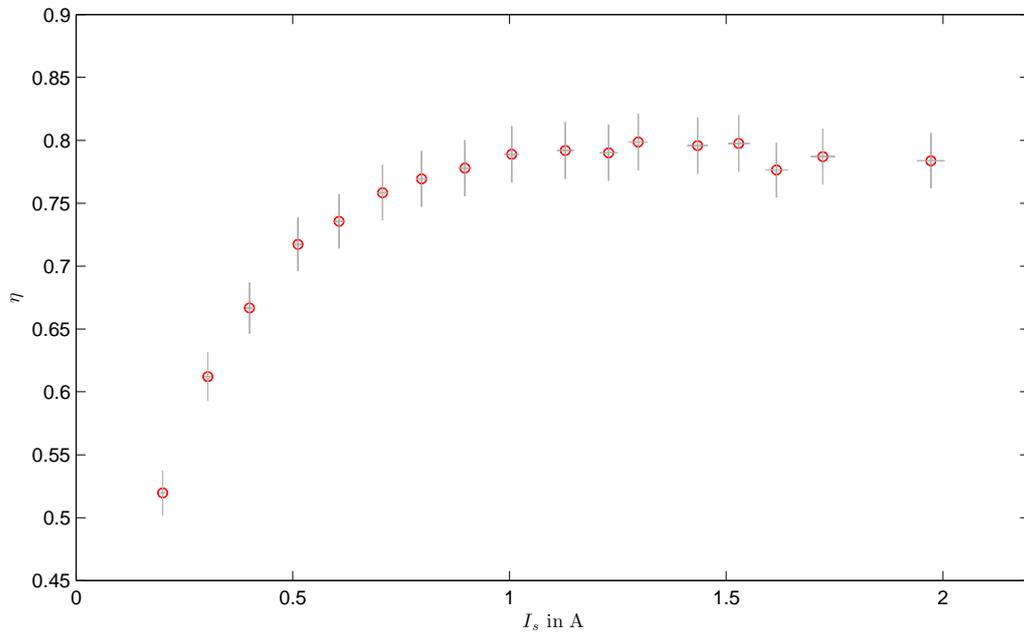
Der Wirkungsgrad sowie dessen Unsicherheit ergibt sich wie folgt:

$$\eta = \frac{P_s}{P_p} \quad (4)$$

$$\Delta\eta = \left| \frac{1}{P_p} \Delta P_s \right| + \left| -\frac{P_s}{P_p^2} \Delta P_p \right| \quad (5)$$

Für die Sekundärleistung sowie deren Unsicherheit ergibt aufgrund des nicht vorhandenen Phasenunterschieds zwischen  $I_s$  und  $U_s$  und der damit möglichen Multiplikation der Effektivwerte offensichtlich zu

$$P_s = I_s \cdot U_s$$
$$\Delta P_s = |I_s \Delta U_s| + |U_s \Delta I_s|$$



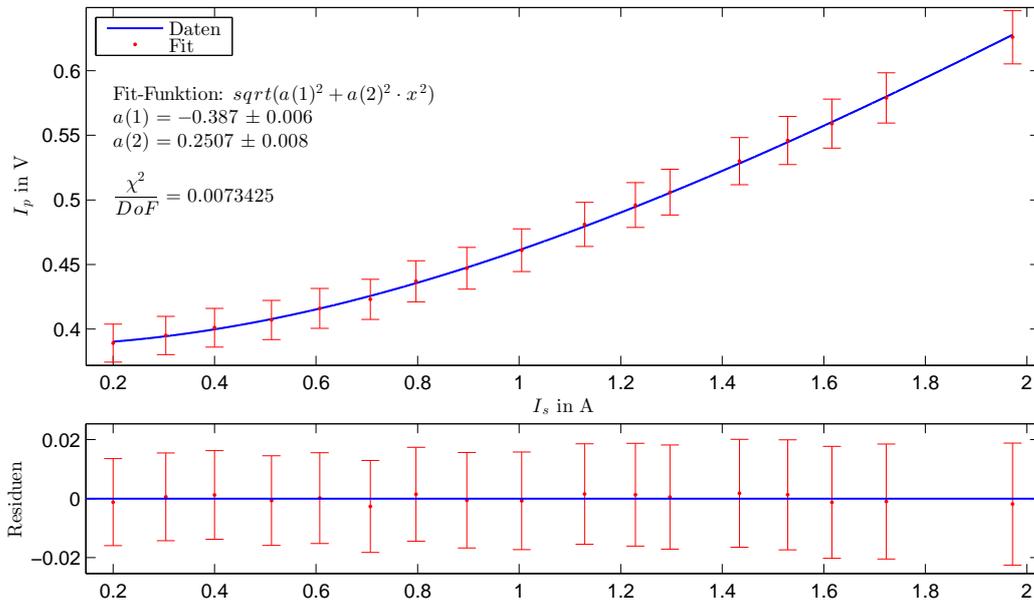
**Abb. 2:** Darstellung der Abhängigkeit des Wirkungsgrades  $\eta$  in Abhängigkeit vom Sekundärstrom  $I_s$

Bei geringen Sekundärströmen ist auch der Wirkungsgrad klein und steigt bei steigendem Sekundärstrom bis auf ein Maximum bei rund  $\eta_{max} = 0,8$ . Dies lässt sich durch eine bei gleichbleibender Primärspannung konstante Verlustleistung erklären, die durch Wirbelströme im Eisenkern und die Hystereseverluste desselben aus dem betrachteten System abgeführt wird. Wenn nun die Sekundärleistung kleiner wird, wird verhältnismäßig mehr Leistung abgeführt, sodass der Wirkungsgrad sinkt.

Bei kleinen Strömen sind auch die ohmschen Verluste klein, wachsen aber quadratisch mit der Stromstärke. Der Wirkungsgrad erreicht ein Maximum bei  $I_s \approx 1,5$  A, sinkt danach aber wieder leicht ab. Das ist vermutlich durch die immer weiter steigenden ohmschen Verluste zu erklären, die nach dem Maximum verhältnismäßig mehr Leistung abführen.

### 1.2.2 Primärstrom

Der Primärstrom muss nun mit einem Ampèremeter mit True-RMS-Funktion gemessen werden, d.h. das Messgerät mittelt tatsächlich und liefert somit auch für nicht sinusoidale Stromstärkeverläufe den korrekten Mittelwert.



**Abb. 3:** Darstellung der Abhängigkeit des Primärstroms  $I_p$  vom Sekundärstrom  $I_s$ , sowie des nichtlinearen Fits

Aus Formel (3) sowie [2, S. 11, Formel 3.3] ergibt sich folgende Abhängigkeit des Effektivwertes des Primärstroms vom Sekundärstrom:

$$I_p^{**}(I_s) = \sqrt{I_p^2 + (T_U \cdot I_s)^2} \quad (6)$$

Mit dieser Funktion lässt sich der in Abbildung 3 zu findende Fit durchführen. Der Wert des zweiten Parameters  $a_2 = T_U = (0,251 \pm 0,008)$  bestätigt das bereits aus der Messungen der Primär- und Sekundärspannung am unbelasteten Transformator gewonnene Übersetzungsverhältnis. Auch der beim unbelasteten Trafo bestimmte Primärstrom findet sich im Parameter  $|a_1| = I_p(I_s = 0) = (0,387 \pm 0,006)$  A mit sehr guter Übereinstimmung wieder.

Der  $\chi^2/DoF$ -Wert liegt auch hier deutlich unter 1, was durch die großen Unsicherheiten des Primärstroms zu erklären ist. Diese können jedoch nicht kleiner abgeschätzt werden, wenn die Herstellerangaben als Richtlinie verwendet werden.

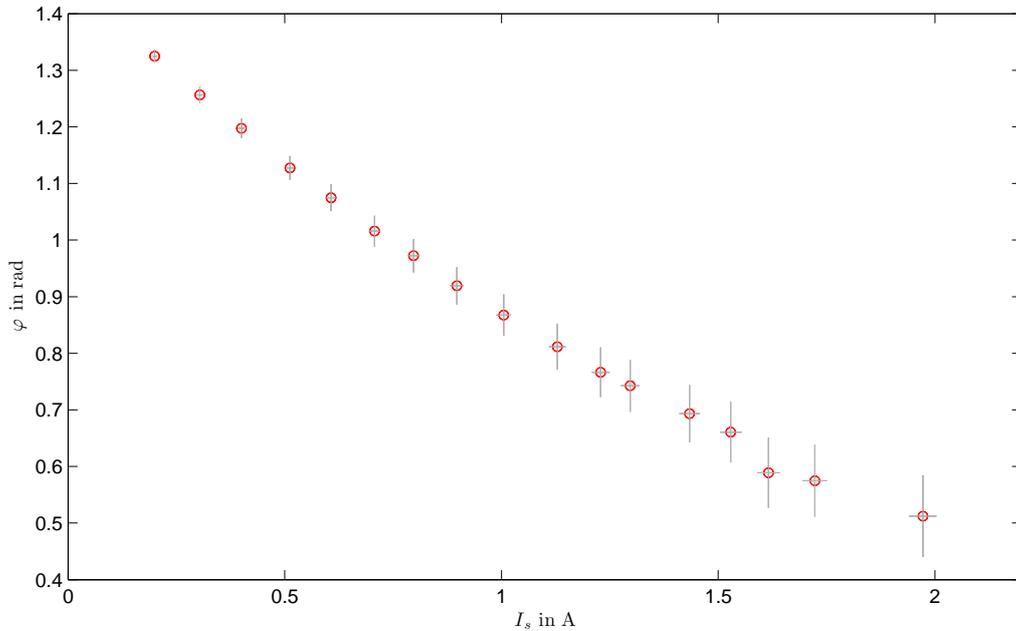
### 1.2.3 Phasenverschiebung

Die Phasenverschiebung im Primärkreis und deren Unsicherheit (wiederum aufgrund der korrelierten Messgrößen mit einer Größtfehlerabschätzung) ergibt sich aus folgender Beziehung (siehe [2, S.11]):

$$P_p = U_p \cdot I_p^{**} \cdot \cos \varphi \quad (7)$$

$$\varphi = \arccos \frac{P_p}{U_p \cdot I_p^{**}} \quad (8)$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{P_p^2}{I_p^{**2} \cdot U_p^2}}} \cdot \left( \left| -\frac{\Delta P_p}{U_p \cdot I_p^{**}} \right| + \left| \frac{P_p \cdot \Delta U_p}{U_p^2 \cdot I_p^{**}} \right| + \left| \frac{P_p \cdot \Delta I_p^{**}}{U_p \cdot I_p^{**2}} \right| \right) \quad (9)$$



**Abb. 4:** Darstellung der Abhängigkeit der Phasenverschiebung  $\varphi$  in Abhängigkeit vom Sekundärstrom  $I_s$

Offensichtlich sinkt die Phasenverschiebung zwischen  $U_p$  und  $I_p^{**}$  mit steigendem Sekundärstrom. Dieser Sachverhalt ergibt sich daraus, dass  $I_p^{**}$  aus Vektoraddition von  $I_p^* = -T_U \cdot I_s$  und  $I_p$  (als konstant angenommen, um  $\pi/2$  gegen  $U_p$  phasenverschoben) gewonnen wird. Es gilt bei  $I_s = I_p^* = 0$ , dass  $I_p^{**} = I_p$ . Bei

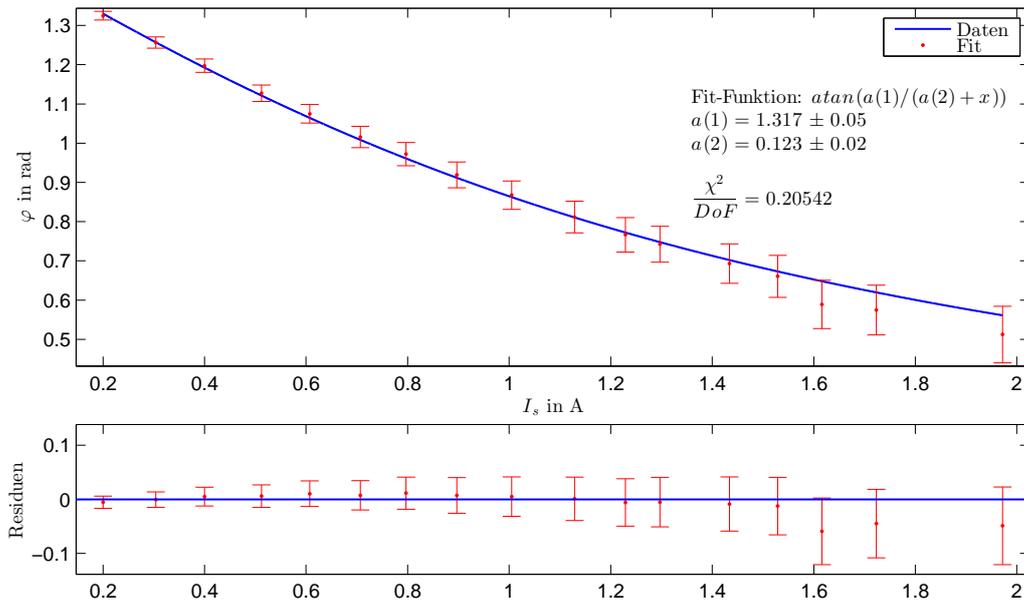
steigendem (Betrag des) Sekundärstrom steigt demzufolge auch der Wirkstrom im Primärkreis. Der Phasenunterschied zwischen Primärspannung und Effektivwert des Primärstroms verringert sich also. Dieser Sachverhalt wird im Skript äußerst gut veranschaulicht. [2, S. 11, Abbildung 3.3]

Die Abhängigkeit  $\varphi(I_s)$  lässt sich (aus dem Phasendiagramm offensichtlich) wie folgt modellieren:

$$\varphi(I_s) = \arctan \frac{|I_p|}{|I_p^*|} = \arctan \frac{I_p}{T_U \cdot I_s} \quad (10)$$

Mit dieser Funktion ist ein Fit durchaus möglich, allerdings ist ein weiterer freier Parameter erforderlich, um jegliche systematische Abweichung zu eliminieren. Ein Offset in y-Richtung liefert hier die besten Ergebnisse, allerdings ist dieser nicht physikalisch erklärbar. Deshalb wird eine Verschiebung  $a_s$  des Sekundärstroms als weiterer freier Parameter in die Funktion eingefügt, der durch die nicht verschwindende Leerlaufleistung begründet werden kann. Diese kann nämlich durch einen zusätzlichen Sekundärstrom modelliert werden, der die entsprechende Leistung an einem ohmschen Widerstand abführt und aufgrund der Konstanz der Wirbelstrom- und Hystereseverluste auch gleichbleibend ist.

Mit der nach dieser Überlegung angepassten Funktion  $y(x) = \arctan \frac{a_1}{x+a_2}$  ergibt sich die Abbildung 5.



**Abb. 5:** Fit der Phasenverschiebung

Aus dem Fitparameter  $a_1 = 1/T_U \cdot I_p$  lässt sich bei Kenntnis des Übersetzungsverhältnis  $T_U$  der Leerlaufprimärstrom bestimmen.

$$I_p = T_U \cdot a_1 \quad (11)$$

$$\Delta I_p = |a_1 \cdot \Delta T_U| + |T_U \cdot \Delta a_1| \quad (12)$$

Daraus ergibt sich ein Primärstrom von  $I_p = (0,33 \pm 0,01)$  A, der im Rahmen der Unsicherheit nicht mit den anderen bereits gewonnenen Werten übereinstimmt.

Dies lässt sich wie folgt durch die Leerlaufleistung erklären: Der berechnete Strom nur der Blindstrom  $I_p$ , während der oben gemessene, größere Leerlaufstrom aus der vektoriellen Addition von  $I_p$  und dem Wirkstrom  $I_p^*$  (der aufgrund des Verlustleistung im Leerlauf ja vorliegen muss) entsteht und somit natürlich größer ist.

Hier liegt der  $\chi^2/DoF$ -Wert nicht mehr so deutlich unter 1 wie in den beiden vorausgehenden Fits, was vermutlich den letzten drei Messwerten geschuldet ist. Diese scheinen systematisch nach unten abzuweichen, der Fit liegt aber noch in den Fehlergrenzen.

## 2 Ergebnisdiskussion

Beim unbelasteten Transformator lässt sich das Übersetzungsverhältnis äußerst einfach und präzise bestimmen, indem die Effektivwerte der Primär- und Sekundärspannung gemessen werden. Die dort bestimmten Werte können durch den Fit der Abhängigkeit des Primärstroms vom Sekundärstrom bestätigt werden, aber diese Methode ist aufwändiger und ungenauer. Aufgrund des Übersetzungsverhältnisses und der Größe des Transformators werden von 1000 Windungen in der Primärspule und 250 Windungen in der Sekundärspule vermutet.

Der maximale Wirkungsgrad liegt wie erwartet deutlich unter 1, und erreicht wenig überraschend keine Spitzenwerte, die laut [2, S.11] bei 95 % liegen, da die Form des Trafos auf Anschaulichkeit und nicht auf einen hohen Wirkungsgrad optimiert wurde. Durch den geschichteten Eisenkern (in dem die Flächennormalen des Querschnitts parallel zum magnetsichen Flusse stehen,  $\vec{A} \parallel \vec{\phi}$ ) lässt sich aber ein erheblich höherer Wirkungsgrad erreichen als mit einem vollen Kern. Dies wird dadurch erreicht, dass die Querschnittsfläche jedes einzelnen Bleches im Kern im Vergleich zum vollen Kern stark verringert ist. Dadurch können keine so hohen Spannungen mehr induziert werden und die jouschen Verluste im Kern sinken nach  $P_J = U_{ind}^2/R = (A \cdot d_t B)^2/R$  quadratisch zur Schichtdicke.

Die Phasenverschiebung zwischen Primärspannung und effektivem Primärstrom  $I_p^{**}$  verhält sich wie erwartet: Bei geringer Last, also geringem Sekundärstrom, entsteht im Primärkreis nur ein kleiner Wirkstrom  $I_p^*$  und die Phasenverschiebung liegt nahe  $\pi/2$ . Steigt die Last und damit der Sekundärstrom, wird auch der Wirkstrom größer und die Phasenverschiebung kleiner, denn der Beitrag des Wirkstroms zu  $I_p^{**}$  steigt.

## Literatur

- [1] MÜLLER, U. : *Physikalisches Grundpraktikum - Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik*. <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Elektrodynamik%20und%20Optik/PDF-Dateien/Elektrodynamik%20und%20Optik.pdf>. Version: 2007
- [2] MÜLLER, U. : *Physikalisches Grundpraktikum - Elektrodynamik und Optik*. <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Elektrodynamik%20und%20Optik/PDF-Dateien/Elektrodynamik%20und%20Optik.pdf>. Version: 2010