Protokoll: Grundpraktikum II E1 - Wheatstonesche Brücke

Sebastian Pfitzner

6. Dezember 2013

Durchführung: Anna Andrle (550727), Sebastian Pfitzner (553983)
Arbeitsplatz: Platz 1
Betreuer: Natalya Sheremetyeva
Versuchsdatum: 26.11.2013

Abstract

Ziel dieses Versuchs ist die möglichst präzise Bestimmung von verschiedenen Widerständen mithilfe der Wheatstoneschen Brücke. Diese Schaltung ermöglicht es, den Messwiderstand zu bestimmen, wenn nur ein Widerstand sowie das Verhältnis zweier anderer bekannt ist und ein empfindliches Strommessgerät zur Verfügung steht, das allerdings nicht geeicht sein muss.

Inhaltsverzeichnis

1 Messwerte und Auswertung

Für die Bestimmung der unbekannten Widerstände bzw. Widerstandsgruppen mit der Wheatstondeschen Brücke ist eine möglichst präzise Kenntnis eines Widerstands R_N sowie des Verhältnis' zweier weiterer Widerstände nötig.

Der Widerstand R_N setzt sich aus drei in Reihe geschalteten Dekadenwiderständen zusammen, während die beiden dazu parallelen Widerstände durch ein Potentiometer realisiert werden. Dieses besteht aus einem Nickeldraht der Länge $L = (1000 \pm 2)$mm sowie einem verschiebbaren Abnehmer, dessen Position mithilfe einer Millimeterskala bestimmt werden kann (Unsicherheit der Länge aus schlecht zu bestimmendem Überstand über die Skala abgeschätzt).

Die Gruppe von Dekadenwiderständen wurde so eingestellt, dass der angezeigte Stromfluss bei einem Widerstandsverhätnis von 1:1 minimal wird, da die resultierende Ungenauigkeit des Widerstands bei möglichst mittiger Position des Schiebers am geringsten ist, wie sich aus einer Betrachtung der relativen Messunsicherheiten ergibt.

Daraufhin wird das Verhältnis der beiden Potentiometerwiderstände so angepasst, dass das Amperemeter keinen Strom mehr anzeigt. Aus der abgelesenen Länge x, der Länge des Nickeldrahtes L sowie dem bekannten Widerstand R_N lässt sich der unbekannte Widerstand wie folgt errechnen:

$$R_W = R_N \cdot \frac{L - x}{x} \tag{1}$$

Dessen Unsicherheit lässt sich durch eine Größtfehlerabschätzung, die aufgrund der Korrelation zwische dem Abstand x und dem Vergleichswiderstand R_N nötig ist, wie folgt berechnen:

$$\Delta R_W = \left|\left(\frac{L - x}{x}\right) \cdot \Delta R_N\right| + \left|\left(\frac{R_N}{x}\right) \cdot \Delta L\right| + \left|\left(\frac{L \cdot R_N}{x^2}\right) \cdot \Delta x\right| \tag{2}$$

Die Unsicherheit der Reihenschaltung von Dekadenwiderständen ergibt sich wie folgt, da für den Dekadenwiderstand im Bereich von 1 Ohm...10 Ohm eine Unsicherheit von 0,5 % und für die beiden anderen mit einem Widerstandsbereich von > 10 Ohm eine Unsicherheit von 0,1 % vorliegt.

$$\begin{aligned}\Delta R_N = \Big[&(0{,}005 \cdot R_N \bmod 10)^2 + (0{,}001 \cdot (R_N \bmod 100 - R_N \bmod 10)^2 \\ &+ (0{,}001 \cdot (R_N \bmod 1000 - R_N \bmod 100)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{3}$$

Die Messunsicherheit des Mittelwerts der abgelesenen Position x des Abnehmers wurde mit $\Delta x = 0{,}6$ mm abgeschätzt. Dieser Wert setzt sich wie folgt zusammen: Für jeden zu bestimmenden Widerstand wurden sechs Messungen ausgeführt, die eine Ableseunsicherheit von ± 1 mm aufweisen. Aus diesen sechs Werten wurde ein gewichtetes Mittel gebildet, was zu unabhängig von den Messwerten zu einer

Unsicherheit von $\pm 0{,}4\,\mathrm{mm}$ führt. Dazu wird pythagoräisch ein Messmittelfehler von $200 \cdot 10^{-6}\mathrm{m} + 10^{-3} \cdot x$ addiert, was für $x \approx 500\,\mathrm{mm}$ die oben angegebene Unsicherheit zur Folge hat.

Für die Unsicherheit des mit dem Multimeter bestimmten Vergleichswert für die einzelnen Widerstände bzw. Widerstandsschaltungen ergibt sich im Bereich bis $400\,\Omega$ eine Unsicherheit von $5\,\mathrm{Digits} + 0{,}008 \cdot R_V$.

Im Folgenden wird R_W der mit der Wheatstoneschen Brücke bestimmte Widerstand, R_V der mit dem Multimeter gemessene und R_B der aus den jeweiligen Formel berechnete Widerstand sein.

1.1 Erster Widerstand

Für den ersten Widerstand ergeben sich aus den oben angegebenen Formeln folgende Werte:

$$\begin{aligned} R_N &= (12{,}00 \pm 0{,}01)\Omega \\ x &= (501{,}0 \pm 0{,}6)\mathrm{mm} \\ R_W &= (11{,}95 \pm 0{,}09)\Omega \end{aligned}$$

Durch eine Messung des Widerstands ergibt sich folgender Vergleichswert:

$$R_V = (12{,}0 \pm 0{,}6)\Omega$$

Die farbkodierte Herstellerangabe liefert folgenden Vergleichswert:

$$R_B = (12{,}0 \pm 0{,}1)\Omega$$

Das gewichtete Mittel der drei Werte R_W, R_V und R_B lässt sich aufgrund der Überlappung der Fehlerintervalle bilden und liefert folgenden Wert:

$$R_1 = (11{,}97 \pm 0{,}6)\Omega$$

1.2 Zweiter Widerstand

Wie oben ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned} R_N &= (68{,}00 \pm 0{,}07)\Omega \\ x &= (500{,}0 \pm 0{,}6)\mathrm{mm} \\ R_W &= (68{,}0 \pm 0{,}5)\Omega \\ R_V &= (68 \pm 1)\Omega \\ R_B &= (68{,}0 \pm 0{,}7)\Omega \end{aligned}$$

Das gewichtete Mittel der drei Werte R_W, R_V und R_B lässt sich aufgrund der Überlappung der Fehlerintervalle bilden und liefert folgenden Wert:

$$R_2 = (68{,}0 \pm 0{,}4)\Omega$$

1.3 Dritter Widerstand

Wie oben ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned} R_N &= (120{,}0 \pm 0{,}1)\Omega \\ x &= (500{,}0 \pm 0{,}6)\text{mm} \\ R_W &= (120{,}0 \pm 0{,}8)\Omega \\ R_V &= (120 \pm 1)\Omega \\ R_B &= (120 \pm 1)\Omega \end{aligned}$$

Das gewichtete Mittel der drei Werte R_W, R_V und R_B lässt sich aufgrund der Überlappung der Fehlerintervalle bilden und liefert folgenden Wert:

$$R_3 = (120 \pm 0{,}5)\Omega$$

1.4 Reihenschaltung aller Widerstände

Hier wurden alle Widerstände in Reihe geschaltet. Folgende Werte ergeben sich:

$$\begin{aligned} R_N &= (201 \pm 0{,}2)\Omega \\ x &= (501 \pm 0{,}6)\text{mm} \\ R_W &= (200{,}2 \pm 0{,}95)\Omega \end{aligned}$$

Aus einer Messung mit dem Multimeter ergibt sich folgender Vergleichswert:

$$R_V = (200 \pm 2)\Omega$$

Durch die Addition der Herstellerangaben für alle drei Widerstände sowie die pythagoäische Addition ihrer Unsicherheiten ergibt sich folgendes Vergleichsergebnis:

$$R_B = (200 \pm 1{,}4)\Omega$$

Das gewichtete Mittel der drei Werte R_W, R_V und R_B lässt sich aufgrund der Überlappung der Fehlerintervalle bilden und liefert folgenden Wert:

$$R_R = (200{,}1 \pm 0{,}7)\Omega$$

1.5 Parallelschaltung aller Widerstände

Hier wurden alle Widerstände parallel geschaltet. Folgende Werte ergeben sich:

$$\begin{aligned} R_N &= (9{,}00 \pm 0{,}05)\Omega \\ x &= (489 \pm 0{,}6)\text{mm} \\ R_W &= (9{,}4 \pm 0{,}1)\Omega \end{aligned}$$

Aus einer Messung mit dem Multimeter ergibt sich folgender Vergleichswert:

$$R_V = (9{,}4 \pm 0{,}6)\Omega$$

Der Gesamtwiderstand lässt sich aus den Herstellerangaben wie folgt berechnen:

$$R_B = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

Daraus ergibt sich durch gaußsche Fehlerfortpflanzung (nach einiger Umformung) folgende Formel für die Unsicherheit

$$\Delta R_B = \sqrt{\frac{R_1^4R_3^4\Delta R_2^2 + R_2^4 \cdot (R_3^4\Delta R_1^2 + R_1^4 \cdot \Delta R_3^2)}{(R_2R_3 + R_1(R_2 + R_3))^4}}$$

Diese beiden Formeln liefern folgenden Vergleichswert:

$$R_B = (9{,}40 \pm 0{,}08)\Omega$$

Das gewichtete Mittel der drei Werte R_W, R_V und R_B lässt sich aufgrund der Überlappung der Fehlerintervalle bilden und liefert folgenden Wert:

$$R_P = (9{,}40 \pm 0{,}06)\Omega$$

1.6 Erster Widerstand in Reihe zu Parallelschaltung aus zweitem und drittem

Hier wird der erste Widerstand in Reihe zu einer Parallelschaltung aus dem zweiten und dritten Widerstand geschaltet. Folgende Werte ergeben sich:

$$\begin{aligned} R_N &= (55 \pm 0{,}06)\Omega \\ x &= (499{,}0 \pm 0{,}6)\mathrm{mm} \\ R_W &= (55{,}2 \pm 0{,}4)\Omega \end{aligned}$$

Aus einer Messung mit dem Multimeter ergibt sich folgender Vergleichswert:

$$R_V = (55{,}4 \pm 0{,}9)\Omega$$

Der Widerstand und seine Unsicherheit lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} R_B &= R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3} \\ \Delta R_B &= \sqrt{\Delta R_1^2 + \left(\frac{R_3^2}{(R_2 + R_3)^2}\right)^2 \cdot \Delta R_2^2 + \left(\frac{R_2^2}{(R_2 + R_3)^2}\right)^2 \cdot \Delta R_3^2} \end{aligned}$$

Diese beiden Formeln führen zu folgendem Ergebnis:

$$R_B = (55{,}4 \pm 0{,}3)\Omega$$

Das gewichtete Mittel der drei Werte R_W, R_V und R_B lässt sich aufgrund der Überlappung der Fehlerintervalle bilden und liefert folgenden Wert:

$$R_{1r23p} = (55{,}4 \pm 0{,}2)\Omega$$

1.7 Dritter Widerstand in Reihe zu Parallelschaltung aus erstem und zweitem

Hier wird der dritte Widerstand in Reihe zu einer Parallelschaltung aus dem zweiten und ersten Widerstand geschaltet. Folgende Werte ergeben sich:

$$\begin{aligned} R_N &= (130 \pm 0{,}1)\Omega \\ x &= (499{,}1 \pm 0{,}6)\text{mm} \\ R_W &= (130{,}5 \pm 0{,}9)\Omega \end{aligned}$$

Aus einer Messung mit dem Multimeter ergibt sich folgender Vergleichswert:

$$R_V = (130{,}3 \pm 1{,}5)\Omega$$

Der Widerstand und seine Unsicherheit lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} R_B &= R_3 + \frac{R_2 R_1}{R_2 + R_1} \\ \Delta R_B &= \sqrt{\left(\frac{R_2^2}{(R_2+R_1)^2}\right)^2 \cdot \Delta R_1^2 + \left(\frac{R_1^2}{(R_2+R_1)^2}\right)^2 \cdot \Delta R_2^2 + \Delta R_3^2} \end{aligned}$$

Diese beiden Formeln führen zu folgendem Ergebnis:

$$R_B = (130{,}2 \pm 1{,}2)\Omega$$

Das gewichtete Mittel der drei Werte R_W, R_V und R_B lässt sich aufgrund der Überlappung der Fehlerintervalle bilden und liefert folgenden Wert:

$$R_{3r12p} = (130{,}4 \pm 0{,}6)\Omega$$

1.8 Erster Widerstand parallel zu Reihenschaltung aus zweitem und drittem

Hier wird der erste Widerstand parallel zu einer Reihenschaltung aus zweitem und drittem Widerstand geschaltet. Folgende Werte ergeben sich:

$$\begin{aligned} R_N &= (11 \pm 0{,}01)\Omega \\ x &= (495{,}0 \pm 0{,}6)\text{mm} \\ R_W &= (11{,}22 \pm 0{,}08)\Omega \end{aligned}$$

Aus einer Messung mit dem Multimeter ergibt sich folgender Vergleichswert:

$$R_V = (11{,}3 \pm 0{,}6)\Omega$$

Der Widerstand und seine Unsicherheit lässt sich wie folgt berechnen:

$$R_B = \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}$$
$$\Delta R_B = \sqrt{\left(\frac{(R_2+R_3)^2}{(R_1+R_2+R_3)^2}\right)^2 \cdot \Delta R_1^2 + \left(\frac{R_1^2}{(R_1+R_2+R_3)^2}\right)^2 \cdot (\Delta R_2^2 + \Delta R_3^2)}$$

Diese beiden Formeln führen zu folgendem Ergebnis:

$$R_B = (11{,}3 \pm 0{,}1)\Omega$$

Das gewichtete Mittel der drei Werte R_W, R_V und R_B lässt sich aufgrund der Überlappung der Fehlerintervalle bilden und liefert folgenden Wert:

$$R_{1p23r} = (11{,}25 \pm 0{,}06)\Omega$$

1.9 Widerstandswürfel

Der gegebene Widerstandswürfel besteht aus zwölf (im Rahmen ihrer Herstellungsgenauigkeit) gleichen Widerständen $R_i = (39{,}0 \pm 0{,}4)\Omega$. Es wurden drei verschiedene Messungen durchgeführt: Eine über eine Seite des Würfels (AB), über die Flächendiagonale (AC) und über die Raumdiagonale (AD).

Würfelseite - AB

Wie bei den bereits vorgenommenen Messungen ergeben sich folgende Ergebnisse:

$$R_N = (23{,}00 \pm 0{,}03)\Omega$$
$$x = (503{,}0 \pm 0{,}6)\text{mm}$$
$$R_W = (22{,}7 \pm 0{,}2)\Omega$$

Mit dem Multimeter wurde folgender Vergleichswert bestimmt:

$$R_V = (22{,}6 \pm 0{,}7)\Omega$$

Auch aus den Herstellerangaben für die Widerstände lässt sich ein Vergleichswert gewinnen. Die dafür notwendige Bestimmungsformel ergibt sich aus geschicktem Einfügen zusätzlicher Verbindungsleiter an Stellen mit gleichem Potential, was die Berechnung erheblich vereinfacht.

$$R_B = \frac{7}{12} R_i$$
$$\Delta R_B = \frac{7}{12} \Delta R_i$$

Daraus ergibt sich mit den Einzelwiderständen (laut Herstellerangabe) von $R_i = (39{,}0 \pm 0{,}4)\Omega$ ein Wert von

$$R_B = (22{,}8 \pm 0{,}2)\Omega$$

Aus den so gewonnenen Werten lässt sich nun wieder ein gewichtetes Mittel bilden, da sich die Fehlerintervalle überlappen. Dies führt zu folgendem Wert:

$$R_{AB} = (22{,}7 \pm 0{,}1)\Omega$$

Flächendiagonale - AC

Wie oben ergeben sich folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned} R_N &= (29{,}00 \pm 0{,}05)\Omega \\ x &= (598{,}3 \pm 0{,}6)\mathrm{mm} \\ R_W &= (29{,}2 \pm 0{,}2)\Omega \end{aligned}$$

Mit dem Multimeter wurde folgender Vergleichswert bestimmt:

$$R_V = (29{,}2 \pm 0{,}7)\Omega$$

Auch aus den Herstellerangaben für die Widerstände lässt sich ein Vergleichswert gewinnen. Die dafür notwendige Bestimmungsformel ergibt sich aus geschicktem Einfügen zusätzlicher Verbindungsleiter an Stellen mit gleichem Potential, was die Berechnung erheblich vereinfacht.

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{3}{4} R_i \\ \Delta R_B &= \frac{3}{4} \Delta R_i \end{aligned}$$

Wie oben ergibt sich daraus

$$R_B = (29{,}3 \pm 0{,}3)\Omega$$

Aus den so gewonnenen Werten lässt sich nun wieder ein gewichtetes Mittel bilden, da sich die Fehlerintervalle überlappen. Dies führt zu folgendem Wert:

$$R_{AC} = (29{,}2 \pm 0{,}2)\Omega$$

Raumdiagonale - AD

Wie oben ergeben sich folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned} R_N &= (33{,}00 \pm 0{,}03)\Omega \\ x &= (504{,}2 \pm 0{,}6)\mathrm{mm} \\ R_W &= (32{,}5 \pm 0{,}2)\Omega \end{aligned}$$

Mit dem Multimeter wurde folgender Vergleichswert bestimmt:

$$R_V = (32{,}5 \pm 0{,}8)\Omega$$

Auch aus den Herstellerangaben für die Widerstände lässt sich ein Vergleichswert gewinnen. Die dafür notwendige Bestimmungsformel ergibt sich aus geschicktem Einfügen zusätzlicher Verbindungsleiter an Stellen mit gleichem Potential, was die Berechnung erheblich vereinfacht.

$$R_B = \frac{5}{6} R_i$$
$$\Delta R_B = \frac{5}{6} \Delta R_i$$

Wie oben ergibt sich daraus

$$R_B = (32{,}5 \pm 0{,}3)\Omega$$

Aus den so gewonnenen Werten lässt sich nun wieder ein gewichtetes Mittel bilden, da sich die Fehlerintervalle überlappen. Dies führt zu folgendem Wert:

$$R_{AD} = (32{,}5 \pm 0{,}2)\Omega$$

Weiterhin lässt sich aus den gemessenen Widerständen $R_{AB}^{(W)}$, $R_{AC}^{(W)}$ und $R_{AD}^{(W)}$ nach den oben genannten Formeln jeweils R_i berechnen und aus den so gewonnenen Werten ein gewichteter Mittelwert bilden:

$$\bar{R}_i = (38{,}9 \pm 0{,}2)\Omega$$

2 Ergebnisdiskussion

Offenbar lässt sich mit der Wheatstoneschen Brücke mit recht geringem Aufwand eine sehr präzise Bestimmung des Widerstands durchführen. Diese ist in vielen Fällen präziser als eine rechnerische Bestimmung aus den Herstellerangaben, die außerdem auch mit erheblich größerem Rechenaufwand verbunden ist. Auch sind erheblich ungenauere Werte zu erwarten, wenn niedrigqualitativere Widerstände mit höherer Fertigungsungenauigkeit verwendet werden, da dann der gemessen Wert näher am realen Wert liegen wird. Auch die Messung mit handelsüblichen Multimetern liefert weniger präzise Messungen, insbesondere bei kleinen Widerständen.

Die Versuchsanordnung ließe sich einerseits durch ein Amperemeter verbessern, das kleinere Ströme registriert und andererseits durch Dekadenwiderstände mit geringerer Ungenauigkeit sowie einer verbesserten Potentiometer-Anordnung, die eine genauere Verstellung des Schiebers erlaubt, verbessern. Da sich der bekannte Widerstand R_N in allen Fällen bis auf $1\,\Omega$ an den zu messenden Widerstand anpassen lässt, wäre beispielsweise eine Mikrometerschraube oder ein ähnliches Instrument zur genauen Verschiebung und Messung der Abnehmerposition des Potentiometers nützlich.